

FAHNENTRANSITIVE LINEARE GRUPPEN
UND
DIE BEDINGUNG
DER FREIEN BEWEGLICHKEIT

*Duss. Erlangen
1983*

von
Helmut Völklein
aus Nürnberg

1983 № 2 65



FAHNENTRANSITIVE LINEARE GRUPPEN
UND
DIE BEDINGUNG
DER FREIEN BEWEGLICHKEIT

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Helmut Völklein
aus Nürnberg

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 18.7.1983

Vorsitzender der Promotionskommission:

Professor Dr. K. Jacobs

Erstberichterstatter: Professor Dr. K. Strambach

Zweitberichterstatter: Professor Dr. H. Kurzweil

Einleitung.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. In Kapitel I erfolgt die Klassifikation der fahnentransitiven linearen Gruppen über gewissen absolut-algebraischen Körpern. In Kapitel II wird untersucht, inwieweit die orthogonalen Gruppen durch gewisse Verallgemeinerungen der Bedingung der "freien Beweglichkeit" charakterisiert werden können; dabei erhält man u.a. eine Klassifikation der fahnentransitiven algebraischen Gruppen (über beliebigen Körpern).

Gemeinsamer Ursprung dieser Fragestellungen ist das sog. Helmholtz-Liesche Raumproblem bzw. dessen algebraische Fassung. Das Raumproblem beinhaltet, die drei klassischen Geometrien (euklidisch, elliptisch und hyperbolisch) durch gewisse höhere Transitivitätseigenschaften der Automorphismengruppe F zu charakterisieren (siehe Freudenthal /7/ für die Entwicklung des Raumproblems). Pickert /16/ begann damit, eine algebraische Form des Raumproblems zu untersuchen (indem er nur die Bedingungen an die Wirkung der Standgruppe F_x im Tangentialraum betrachtete und sämtliche topologischen Bedingungen fallen ließ). Das von Pickert aufgeworfene Problem wurde von Baer /1/ in voller Allgemeinheit gelöst; Baer zeigte, daß die linearen Gruppen über einem angeordneten Körper, welche die Bedingung der freien Beweglichkeit erfüllen (d.h. scharf transitiv auf der Menge der Fahnen orientierter Teilräume operieren), genau die zu "positiv-definiten" quadratischen Formen gehörigen orthogonalen Gruppen sind.

Das Postulat der freien Beweglichkeit für eine lineare Gruppe G besagt in äquivalenter Formulierung, daß G transitiv auf der Menge der (gewöhnlichen) Fahnen operiert und daß die Standgruppe in G einer Fahne eine maximale Gruppe von Involutionen (in der entsprechenden vollen linearen



Gruppe) ist. Diese Formulierung macht Sinn für lineare Gruppen über beliebigen Körpern und bietet gleichzeitig eine Reihe von Verallgemeinerungsmöglichkeiten (siehe Baer /1/). So wurde in Völklein /20/ gezeigt, daß man die zu "positiv-definiten" hermite'schen Formen gehörigen unitären Gruppen (in gewissen Fällen) dadurch charakterisieren kann, daß man unter Beibehaltung der Fahnen-transitivität die Bedingung an die Standgruppe einer Fahne zur Kommutativität abschwächt. In Anbetracht dieses Resultats erhebt sich nun die Frage nach der Klassifikation aller fahnentransitiven Gruppen. Dieses Problem wird in Kapitel I der vorliegenden Arbeit untersucht.

Eine andere Richtung zur Verallgemeinerung der Bedingung der freien Beweglichkeit wird von Freudenthal /8/ angezeigt. In dieser Arbeit hat Freudenthal darauf hingewiesen, daß das Raumproblem auch die Charakterisierung von Geometrien mit indefiniter Metrik umfaßt (und hat dies in topologischem Rahmen bearbeitet). Somit liegt es nahe, nun auch eine algebraische Fassung des "Raumproblems bei indefiniter Metrik" zu untersuchen. Dies erfolgt in Kapitel II der vorliegenden Arbeit.

Wir gehen zunächst näher auf Kapitel II ein. Will man also auch isotrope orthogonale Gruppen charakterisieren, so muß man die Bedingung der Fahnentransitivität abschwächen. Es zeigt sich, daß man diese Bedingung sogar gänzlich fallenlassen kann, wenn man nur die obige Bedingung an die Standgruppe einer Fahne für alle Fahnen aus einer nichtleeren (Zariski-) offenen Menge fordert (siehe Kap. II, Satz 1). Anknüpfend an die ursprüngliche Bedingung der freien Beweglichkeit kann man dieses Resultat wie folgt formulieren (siehe Kap. II, Kor. 2): Sei K ein Körper mit genau einer Anordnung und G eine irreduzible Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 3$. Die folgende Bedingung charakterisiert dann die orthogonalen Gruppen: Es operiert G frei auf einer nicht-

leeren offenen Menge $\underline{B}$ von Fahnen orientierter Teilräume, so daß die Bahnen von G in $\underline{B}$ invariant unter Orientierungswechsel sind. (Die Menge $\underline{B}$ heiße dabei offen, falls sie das Urbild einer (Zariski-)offenen Teilmenge des Raums der (gewöhnlichen) Fahnen ist).

Andererseits bleibt man vielleicht näher am topologischen Analogon (d.h. an der Freudenthalschen Arbeit /8/), wenn man die Fahnentransitivität nicht gänzlich fallen läßt, sondern durch die Transitivität auf einer offenen Menge $\underline{B}$ von Fahnen ersetzt. Enthält die Menge $\underline{B}$ nicht alle Fahnen, so benötigt man überraschenderweise keine weiteren Forderungen an die Standgruppe einer Fahne (wenigstens im Fall ungerader Dimension), um zu erzwingen, daß der unterliegende Körper K quadratisch abgeschlossen ist und die Gruppe zwischen $SO(n, K)$ und $K^*O(n, K)$ liegt (siehe Kap. II, Satz 2). Dieses Ergebnis wird durch die Darstellungstheorie der halbeinfachen algebraischen Gruppen ermöglicht. Der Beweis liefert auch die Klassifikation der fahnentransitiven algebraischen Gruppen über beliebigen Körpern (Kap. II, Satz 3).

Wie oben erwähnt, war der Ausgangspunkt der Untersuchungen in Kapitel I die Frage nach den fahnentransitiven linearen Gruppen mit nichtabelscher Standgruppe (einer Fahne). Es zeigt sich, daß diese Frage eng mit der Struktur der Teilringe des unterliegenden Körpers zusammenhängt. Für gewisse absolut-algebraische Körper ist diese Struktur übersichtlich genug, um eine Klassifikation der fahnentransitiven Gruppen über solchen Körpern zu gestatten.

Ist K algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers, so ist jeder Teilring von K ein Körper. In diesem Fall gilt (Kap. I, Satz 1): Jede fahnentransitive Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 5$, enthält die Gruppe $SL(n, K)$. Dies verallgemeinert ein Resultat von D.G.Higman /11/ für endliche

Körper.

Ist K nicht algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers, so hat $SL(n, K)$ stets echte fahnentransitive Untergruppen (siehe Kap. I, Bem.1). Das Hauptergebnis von Kapitel I gibt die Klassifikation dieser Gruppen über algebraischen Zahlkörpern K : Zu jeder fahnentransitiven Untergruppe G von $GL(n, K)$, $n \geq 5$, existiert ein Hauptidealring R mit Quotientenkörper K , so daß G zu einer Gruppe zwischen $SL(n, R)$ und $K * GL(n, R)$ konjugiert ist (siehe Satz 2).

Als Korollar erhält man die Klassifikation der Gruppen zwischen $SL(n, R)$ und $GL(n, K)$, $n \geq 3$, wenn R ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K und K ein algebraischer Zahlkörper ist. Ferner ergibt sich, daß für jeden Integritätsbereich R , welcher maximaler Teilring seines Quotientenkörpers K ist, gilt: Die Gruppe $SL(n, R)$ ist maximale Untergruppe von $SL(n, K)$.

Ein wichtiger Schritt beim Beweis des Hauptergebnisses ist die Klassifikation der fahnentransitiven Gruppen über gewissen endlichen, kommutativen Ringen (Kap. I, §7). Wesentlich benutzt wird ferner die allgemeine Strukturtheorie der linearen Gruppe über einem Ring (siehe Bass /2/) sowie die Tatsache, daß die Gruppe $SL(n, R)$, $n \geq 3$, von den Elementarmatrizen erzeugt wird, wenn R ein Dedekind-Ring in einem algebraischen Zahlkörper ist (Ein Spezialfall des "Kongruenz-Untergruppen-Problems", siehe Bass/Milnor/Serre /3/). Schließlich werden die Ergebnisse über fahnentransitive Gruppen mit abelscher Standgruppe (Völklein /20/) benötigt, um die Existenz von unipotenten Elementen sicherzustellen und damit die Konstruktion in Gang zu bringen. (Enthält nämlich eine lineare Gruppe keine unipotenten Elemente, so ist die Standgruppe jeder Fahne abelsch; siehe Kap. I, §6).

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof.Dr.K. Strambach für wertvolle Anregungen und freundliche Unterstützung vor und während der Anfertigung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank aussprechen. Ferner möchte ich mich bei Herrn Prof.Dr.P. Plaumann und Herrn Prof.Dr.W.-D. Geyer für einige hilfreiche Hinweise bedanken.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Einleitung	3
KAPITEL I: FAHNENTRANSITIVE LINEARE GRUPPEN ÜBER ABSOLUT-ALGEBRAISCHEN KÖRPERN	9
§1. Hauptergebnisse	10
§2. Zwei Hilfssätze	11
§3. Der Grundstock der Beweise	13
§4. Hilfssätze über algebraische Zahlkörper	17
§5. Schwache Versionen der Sätze 1 und 2	21
§6. Die Existenz von unipotenten Elementen und der Beweis von Satz 1	22
§7. Fahnentransitive Gruppen über endlichen Ringern und der Beweis von Satz 2	27
KAPITEL II: ORTHOGONALE GRUPPEN UND DIE BEDINGUNG DER FREIEN BEWEGLICHKEIT BEI INDEFINITER METRIK	35
§1. Hauptergebnisse	35
§2. Vorbereitungen zum Beweis von Satz 1	43
§3. Der Beweis von Satz 1	48
§4. Der Beweis von Lemma 1	53
Literaturverzeichnis	59

KAPITEL I: FAHNENTRANSITIVE LINEARE GRUPPEN ÜBER
ABSOLUT-ALGEBRAISCHEN KÖRPERN

Bezeichnungen.

Es sei stets K ein kommutativer Körper und n eine natürliche Zahl. Ist V ein K -Vektorraum der Dimension n und $0 < r < n$, so bezeichne $\underline{G}_r(V)$ die Menge der r -dimensionalen Teilräume von V . Eine Hyperebene von V ist ein Element von $\underline{G}_{n-1}(V)$; eine Fahne in V ist ein $(n-1)$ -Tupel $(V_1, \dots, V_{n-1})$ von Teilräumen von V mit $\{0\} < V_1 < \dots < V_{n-1} < V$. Eine Untergruppe von $GL(V)$ heiße fahnentransitiv, falls sie transitiv auf der Menge $\underline{F}(V)$ der Fahnen in V operiert.

Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X , so bezeichne G_x für jedes x aus X die Standgruppe von x in G ; gilt $G_x = \{1\}$ für jedes x aus X , so sagen wir, daß G frei auf X operiert. Ist G eine Untergruppe von $GL(V)$ und W ein Teilraum von V , so bezeichne G^W die von G_W in W induzierte Gruppe; für jedes g aus G_W sei $g|_W$ bzw. $g|_{V/W}$ die von g in W bzw. in V/W induzierte Abbildung. Ein Element h von $GL(V)$ heiße Transvektion, falls $\text{kern}(h - \text{id})$ eine Hyperebene ist, welche $\text{Im}(h - \text{id})$ enthält.

Ist R ein Teilring von K und M eine Teilmenge von V , so bezeichne $[M]_R$ den von M in V erzeugten R -Modul. Für jeden kommutativen Ring R sei R^* die Einheitengruppe von R . Ist A ein freier R -Modul vom Rang n , so bezeichne $GL(A)$ bzw. $SL(A)$ die Automorphismengruppe von A bzw. die Gruppe der Automorphismen von A mit Determinante 1; $GL(n, R)$ und $SL(n, R)$ seien die entsprechenden Matrixgruppen. Schließlich bezeichne $\mathbb{Z}$ den Ring der ganzen Zahlen.

§1. HAUPTERGEBNISSE

SATZ 1. Sei K algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers und $n \geq 5$. Dann enthält jede fahnentransitive Untergruppe von $GL(n, K)$ die Gruppe $SL(n, K)$.

BEMERKUNG 1. Für endliches K wurde dies von D.G. Higman /11/ gezeigt. Ist K ein Körper, welcher nicht algebraisch über einem endlichen Körper ist, so enthält $SL(n, K)$ stets echte fahnentransitive Untergruppen; denn nach dem untenstehenden Lemma 1 wirkt $SL(n, R)$ fahnentransitiv in K^n für jeden Bewertungsring R von K .

SATZ 2. Sei K ein algebraischer Zahlkörper und G eine Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 5$. Genau dann wirkt G fahnentransitiv in K^n , wenn ein Hauptidealring R mit Quotientenkörper K und eine zu G konjugierte Untergruppe G_1 von $GL(n, K)$ existieren mit $SL(n, R) \leq G_1 \leq K^* GL(n, R)$.

KOROLLAR 0. Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $n \geq 5$. Die fahnentransitiven Untergruppen von $SL(n, K)$ sind dann genau die $GL(n, K)$ -Konjugierten der Gruppen $SL(n, R)$, R ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K .

KOROLLAR 1. Sei K ein algebraischer Zahlkörper und $n \geq 3$. Ferner sei R_0 ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K . Ist dann G eine Untergruppe von $GL(n, K)$, welche die Gruppe $SL(n, R_0)$ enthält, so gilt $SL(n, R) \leq G \leq K^* GL(n, R)$ für einen Ring R zwischen R_0 und K .

KOROLLAR 2. Sei $n \geq 3$, und sei R ein Integritätsbereich, welcher maximaler Teilring seines Quotientenkörpers K ist. Dann ist $SL(n, R)$ maximale Untergruppe von $SL(n, K)$.

BEMERKUNG 2. Korollar 1 und 2 ergeben sich als Nebenprodukt beim Beweis von Satz 1 und 2. Zum Fall $n = 3, 4$ sei folgendes gesagt (siehe hierzu auch Satz 1' und 2'): Hinsichtlich Satz 1 sind mir nur die drei von Higman /11/ im endlichen Fall gefundenen Gegenbeispiele bekannt (und ich nehme auch an, daß keine weiteren existieren). Jeder Bewertungsring R mit Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(2)$ in einem algebraischen Zahlkörper liefert ein Gegenbeispiel zu Satz 2, denn das Urbild in $SL(n, R)$ ($n = 3, 4$) einer der in /11/ angegebenen, fahnen-transitiven, echten Untergruppen von $SL(n, \mathbb{Z}/(2))$ ist dann eine fahnen-transitive Untergruppe von $SL(n, R)$ vom Index 8.

Schließlich sei bemerkt, daß der Fall $n=2$ von den hier verwendeten Methoden überhaupt nicht erfaßt wird.

§2. ZWEI HILFSSÄTZE

LEMMA 1. Sei R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K . Dann sind äquivalent:

- (1) R ist ein Bezout-Ring.
- (2) $SL(n, R)$ wirkt fahnen-transitiv in K^n für alle $n \geq 2$.
- (3) $GL(n, R)$ wirkt fahnen-transitiv in K^n für ein $n \geq 2$.

Beweis: Wirkt $GL(n, R)$ fahnen-transitiv in K^n für ein $n \geq 2$, so wirkt $GL(2, R)$ fahnen-transitiv in K^2 ; also existiert zu jedem (a, b) aus R^2 eine Matrix A aus $GL(2, R)$ und ein c aus R mit $(a, b)A = (c, 0)$. Dann gilt $Ra + Rb = Rc$, und somit ist R ein Bezout-Ring. Dies zeigt die Implikation (3) $\rightarrow$ (1). Da der Schluß von (2) auf (3) trivial ist, bleibt nur zu zeigen, daß (2) aus (1) folgt. Sei also angenommen, daß R ein Bezout-Ring ist.

Wir verwenden Induktion nach n . Im Fall $n=2$ ist zu zeigen, daß zu jedem (a,b) aus R^2 mit $Ra + Rb = R$ eine Matrix A aus $SL(2,R)$ existiert mit $(1,0)A = (a,b)$; das ist aber klar. Sei nun angenommen, daß $n > 2$ und daß $SL(n-1,R)$ fahnen-
transitiv in K^{n-1} wirkt. Dann läßt sich jedes $(x_1, \dots, x_n)$ aus K^n durch ein Element von $SL(n,R)$ auf ein $(x_1, y, 0, \dots, 0)$ abbilden, und dieses wiederum auf ein $(z, 0, \dots, 0)$. Also wirkt $SL(n,R)$ transitiv auf $\underline{G}_1(K^n)$; folglich genügt es zu zeigen, daß die Standgruppe in $SL(n,R)$ des Raums $P := K(0, \dots, 0, 1)$ fahnen-
transitiv in K^n/P wirkt. Dies folgt aus der Induktionsvoraussetzung.

LEMMA 2. Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $n \geq 4$.
Ferner sei E eine Untergruppe von $SL(n-1, \mathbb{Z})$, so daß für jede Transvektion t aus $SL(n-1, \mathbb{Z})$ eine ganze Zahl $m > 0$ existiert mit $t^m \in E$. Schließlich sei ϕ eine Abbildung von E in K^{n-1} , so daß die Menge U aller Matrizen $\begin{pmatrix} A & 0 \\ \phi(A) & 1 \end{pmatrix}$, A aus E , eine Untergruppe von $GL(n, K)$ bildet. (Dabei bezeichnet 0 den aus $n-1$ Nullen bestehenden Spaltenvektor). Dann enthält U eine Transvektion.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Rechnungen im Beweis von /11, Lemma 4/. Die Punkte (1) und (2) in diesem Beweis zeigen die Behauptung im Fall $n \geq 4$. Im Fall $n=4$ verwendet man Punkt (7) und (9) sowie die Tatsache " $x_2=0$ ", welche aus der Rechnung nach (10) folgt.

§3. DER GRUNDSTOCK DER BEWEISE

Von nun an sei stets V ein K -Vektorraum der Dimension n .

In der Situation des folgenden Lemmas ist V Lokalisierung des R -Moduls A und demnach ist die Automorphismengruppe $GL(A)$ von A in kanonischer Weise Untergruppe von $GL(V)$.

LEMMA 3. Sei $n \geq 3$ und R ein ganz abgeschlossener Teilring von K , so daß der Quotientenkörper von R in K gleich K ist. Ferner sei G eine Untergruppe von $GL(V)$, welche transitiv auf der Menge der inzidenten Paare (P, H) aus $\underline{G}_1(V) \times \underline{G}_{n-1}(V)$ wirkt. Für jede Hyperebene H von V bezeichne $\bar{G}_H$ die Gruppe aller g aus $K^* G_H$ mit $g|_{V/H} = \text{id}$; es gelte für jedes $x \neq 0$ aus H , daß der Raum $[\bar{G}_H(x)]_R$ ein freier R -Modul vom Rang $n-1$ ist. Ferner bezeichne $\tilde{G}$ die Gruppe aller g aus $K^* G$ mit $\det(g) \in R^*$.

Für jedes $y \neq 0$ aus V ist dann $A := R \tilde{G}(y)$ ein R -Modul in V , so daß zu jeder Hyperebene H von V ein $x \neq 0$ aus H existiert mit $A \cap H = [\bar{G}_H(x)]_R$. Ferner ist G in der Gruppe $K^* GL(A)$ enthalten.

Beweis: Für $H \in \underline{G}_{n-1}(V)$ und $x \in H$, $x \neq 0$, sei $F(x, H) := [\bar{G}_H(x)]_R$.

Dann gilt: (1) $F(x, H) = R \bar{G}_H(x)$

Da $\bar{G}_H$ transitiv auf $\underline{G}_1(H)$ operiert, existieren nämlich zu jedem z aus $F(x, H)$ ein g aus $\bar{G}_H$ und ein r aus K mit $z = r g(x)$. Dann gilt $r F(x, H) = F(rx, H) = F(z, H) \leq F(x, H)$, und somit liegt r in R (da $F(x, H)$ ein freier R -Modul ist). Dies zeigt $F(x, H) \leq R \bar{G}_H(x)$. Die umgekehrte Inklusion ist klar.

Da $\bar{G}_H$ in V/H trivial wirkt und in H einen freien R -Modul vom Rang $n-1$ invariant läßt, gilt ferner: (2) $\bar{G}_H \leq \tilde{G}$.

Aus (2) und der Tatsache, daß $\bar{G}_H$ transitiv auf $\underline{G}_1(H)$ wirkt, folgt: (3) $\tilde{G}$ wirkt transitiv auf $\underline{G}_1(V)$.

Wir benötigen weiter: (4) $(K^* G)_Z \leq \tilde{G}$ für alle $z \neq 0$ aus V . Dies folgt aus (2) unter Beachtung der Tatsache, daß jedes Element der Standgruppe $(K^* G)_Z$ den Eigenwert 1 hat und somit in einem $\bar{G}_H$ liegt.

(5) Sind $H \in \bar{G}_{n-1}(V)$ und $z_1, z_2 \in H$ mit $z_1 \in \tilde{G}(z_2)$, so gilt $z_1 \in R \bar{G}_H(z_2)$.

Sei nämlich $z_1 = g(z_2)$ für ein g aus $\tilde{G}$; wir können annehmen $z_1 \neq 0$. Wegen der Transitivitätseigenschaften von G existiert dann ein h aus $K^* G$ mit $h(z_1) = z_1$ und $h(g(H)) = H$. Nach (4) ist also $f := hg$ ein Element von $\tilde{G}$ mit $z_1 = f(z_2)$ und $f(H) = H$. Sei r aus K mit $f' := rf \in \bar{G}_H$. Nach (2) gilt dann $r^n = \det(f') \det(f)^{-1} \in R^*$. Folglich liegt auch r in R^* , da R ganz abgeschlossen ist (in K). Also $z_1 = f(z_2) = r^{-1} f'(z_2) \in R \bar{G}_H(z_2)$. Dies zeigt (5).

Nun können wir den Beweis des Lemmas zu Ende bringen. Sei $y \neq 0$ aus V und $A := R \tilde{G}(y)$. Für jede Hyperebene H von V existiert dann gemäß (3) ein x aus H mit $x \in \tilde{G}(y)$. Nach (5) gilt dann $A \cap H = (R \tilde{G}(x)) \cap H \leq R \bar{G}_H(x) \leq F(x, H)$. Nach (1) und (2) ist zudem $F(x, H)$ in A enthalten, also $A \cap H = F(x, H)$. Daraus folgt insbesondere, daß A ein R -Modul ist. Nach (3) und (4) gilt schließlich

$$G \leq K^* G = (K^* G)_{K_Y} \tilde{G} = K^* (K^* G)_Y \tilde{G} = K^* \tilde{G} \leq K^* GL(A).$$

LEMMA 4. Es gelte in der Situation von Lemma 3 zusätzlich, daß G eine Transvektion enthält und daß eine natürliche Zahl N existiert mit $N [\bar{G}_H(x)]_R \leq [\bar{G}_H(x)]_Z$ für alle Hyperebenen H von V und alle x aus H . Dann existiert ein $q \neq 0$ aus R , so daß die Gruppe G alle Transvektionen u aus $GL(V)$ mit $(u - \text{id})(A) \leq qA$ enthält.

Beweis: Sei H eine Hyperebene von V und U die Gruppe aller u aus $GL(V)$ mit $u|_H = \text{id}$ und $u|_{V/H} = \text{id}$. Ferner sei a ein Element von A , welches nicht in H liegt. Dann ist die

Abbildung $\lambda: u \mapsto u(a) - a$ ein Isomorphismus von U auf die additive Gruppe von H . Ferner gilt:

$$(I) \quad \lambda(gug^{-1}) = g(\lambda(u)) \quad \text{für alle } u \in U \text{ und } g \in GL(V) \text{ mit} \\ g(H) = H \quad \text{und} \quad g|_{V/H} = \text{id}.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $u_0 \neq 1$ aus $U \cap G$. Wegen $\det(u_0) = 1$ liegt dann u_0 in $\tilde{G}$, und somit ist $x_0 := \lambda(u_0)$ ein von 0 verschiedenes Element von $A \cap H$. Nach Lemma 3 existiert ein x aus H mit $A \cap H = F(x, H)$ (in der Notation des Beweises von Lemma 3). Da $\bar{G}_H$ transitiv auf $\underline{G}_1(H)$ wirkt, existieren ferner ein f aus $\bar{G}_H$ und s, t aus R mit $t \neq 0$ und $s x_0 = t f(x)$. Man setze $q := tN$.

Nach (I) ist der Raum $\lambda(U \cap G)$ invariant unter $\bar{G}_H$, und somit gilt $\lambda(U \cap G) \supseteq [\bar{G}_H(x_0)]_{\mathbb{Z}} \supseteq N F(x_0, H) \supseteq N F(s x_0, H) = N F(t x, H) = q F(x, H) = q(A \cap H)$. Folglich enthält G alle Transvektionen u aus $GL(V)$ mit $\text{kern}(u - \text{id}) = H$ und $(u - \text{id})(A) \leq qA$. Da die Gruppe G in $K^* GL(A)$ enthalten ist und transitiv auf $\underline{G}_{n-1}(V)$ operiert, zeigt dies die Behauptung.

BEMERKUNG 3. Wir können nun den Beweis von Korollar 2 führen. Hierzu sei bemerkt, daß die Integritätsbereiche, welche maximaler Teilring ihres Quotientenkörpers sind, genau die eindimensionalen Bewertungsringe sind (Dies folgt mit Standardschlüssen der Kommutativen Algebra, siehe z.B. /15/). Der Beweis von Korollar 2 zeigt, daß in der dortigen Situation genauer gilt: Ist G eine Untergruppe von $GL(n, K)$, welche die Gruppe $SL(n, R)$ enthält, so ist G entweder in $K^* GL(n, R)$ enthalten oder enthält die Gruppe $SL(n, K)$.

Beweis von Korollar 2: Seien n, R, K wie in Korollar 2. Sei ferner $B = Rx_1 + \dots + Rx_n$ ein freier R -Modul in V vom Rang n und G eine Untergruppe von $SL(V)$, welche die Gruppe $SL(B)$ enthält. Da R ein Bewertungsring ist, wirkt dann G fahnen transitiv in V (nach Lemma 1).

Sei H die von $x_1, \dots, x_{n-1}$ aufgespannte Hyperebene von V ;
ferner sei $\bar{G}_H$ wie in Lemma 3 die Gruppe aller g aus $K^* G_H$
mit $g|_{V/H} = \text{id}$. Dann ist $C := Rx_1 + \dots + Rx_{n-1}$ ein freier
 R -Modul in H , so daß $SL(C)$ in der von $\bar{G}_H$ in H induzierten
Gruppe enthalten ist. Folglich gilt

$$C = [SL(C)(x_1)]_{\mathbb{Z}} \leq [\bar{G}_H(x_1)]_{\mathbb{Z}} =: M \quad , \text{ und somit ist } R \text{ in dem} \\ \text{folgenden Ring } R' \text{ enthalten: } R' = \{t \in K: tx_1 \in M\} = \\ = \{t \in K: tM \leq M\} \quad .$$

Wir betrachten zunächst den Fall $R' = K$. In diesem Fall
gilt $M = H$ und somit folgt aus Lemma 4 (mit K anstelle
von R), daß G alle Transvektionen aus $GL(V)$ enthält. Dann
ist $G = SL(V)$.

Da R maximaler Teilring von K ist, müssen wir jetzt nur
noch den Fall $R' = R$ untersuchen. In diesem Fall gilt
 $M \cap Kx_1 = Rx_1 = C \cap Kx_1$. Da die Gruppe $SL(C)$ transitiv auf
 $\underline{G}_1(H)$ wirkt und den Modul M invariant läßt, folgt nun
 $M = C$. Somit sind alle Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt,
und wir erhalten, daß $A := R \tilde{G}(x_1)$ ein R -Modul in V ist.
Ferner folgt aus dem Beweis von Lemma 3, daß $A \cap H = M$;
also hat man $A \cap H = C = B \cap H$. Daraus folgt $A = B$, da
die Gruppe $SL(B)$ transitiv auf $\underline{G}_{n-1}(V)$ operiert und in $\tilde{G}$
enthalten ist. Es ist sogar die Gruppe G in $\tilde{G}$ enthalten
(wegen $G \leq SL(V)$) , also $G \leq \tilde{G} \leq GL(A) = GL(B)$. Dies
zeigt $G = SL(B)$.

LEMMA 5. Sei $n \geq 2$ und F eine Untergruppe von $GL(V)$, welche
transitiv auf $\underline{G}_1(V)$ wirkt. Es sei $F_x \neq \{1\}$ für
alle x aus V . Ferner sei R der Teilring von K mit
 $R = \{t \in K: tx \in [F(x)]_{\mathbb{Z}}\} = \{t \in K: t \cdot [F(x)]_{\mathbb{Z}} \leq [F(x)]_{\mathbb{Z}}\}$
für alle $x \neq 0$ aus V .
Dann ist der Quotientenkörper von R in K gleich K .

Beweis: Sei k der Quotientenkörper von R in K und $x \neq 0$ aus V .
Dann ist $X := [F(x)]_k$ ein irreduzibler $k[F]$ -Modul. Zu jedem
 $y \neq 0$ aus X existiert nämlich ein f aus F mit $f(y) \in Kx$; also
gilt $f(y) = rs^{-1}x$ für gewisse r, s aus R , $s \neq 0$ (nach Defini-

tion von R) und somit $[F(y)]_k = [F(rs^{-1}x)]_k = X$.

Da V die Vereinigung der irreduziblen $k[F]$ -Moduln tX ($t \in K$) ist, existiert eine Familie $(t_i)_{i \in I}$ in $K \setminus \{0\}$, so daß V (als k -Vektorraum) die direkte Summe der $t_i X$ ist (siehe z.B. /14, S.119, Cor.1/). Es bezeichne $p_i: V \rightarrow t_i X$ die i -te Projektion bzgl. dieser direkten Zerlegung von V . Hat man nun zwei verschiedene Elemente i, j von I und ein y aus X gegeben, so existiert ein t aus K mit $t_i x + t_j y \in tX$. Dann ist die Abbildung $p_i|_{tX}$ ein F -equivarianter Isomorphismus von tX auf $t_i X$, und folglich ist die Abbildung $z \mapsto t_j^{-1} p_j(p_i|_{tX})^{-1}(t_i z)$ ein F -equivarianter Endomorphismus von X , welcher x auf y abbildet.

Im Fall $|I| > 1$ ist damit gezeigt: Zu jedem y aus X existiert ein Endomorphismus von X , welcher mit der Wirkung von F vertauscht und x auf y abbildet. Dies steht im Widerspruch zu der Voraussetzung $F_X \neq \{1\}$. Also hat die Menge I nur ein Element, und es gilt $K = k = \text{Quotientenkörper von } R$.

§4. HILFSSÄTZE ÜBER ALGEBRAISCHE ZAHLKÖRPER

HILFSSATZ 1. Jeder Teilring R eines algebraischen Zahlkörpers ist noethersch.

Beweis: Man findet Elemente $r_1, \dots, r_k$ von R , welche ganz über $\mathbb{Z}$ sind und die Beziehung $\mathbb{Z}[r_1, \dots, r_k] \leq R \leq \mathbb{Q}[r_1, \dots, r_k]$ erfüllen. Die Behauptung folgt dann aus /15, Thm. 93/.

HILFSSATZ 2. Sei K ein algebraischer Zahlkörper und R ein Teilring von K , welcher den Ring J der ganzen Zahlen in K enthält. Dann ist R ein Dedekind-Ring.

Beweis: Wir behandeln zunächst den Spezialfall, daß R ein lokaler Ring ist. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R . Dann ist $\mathfrak{m} \cap J$ ein echtes Ideal von J , und ist somit in einem Primideal P von J enthalten. Folglich enthält R den lokalisierten Ring J_P . Also $R = J_P$ oder $R = K$.

Im allgemeinen Fall erhält man nun aus obigem Spezialfall, daß für jedes Primideal Q von R gilt: Der lokalisierte Ring R_Q ist ein diskreter Bewertungsring. Da R nach Hilfssatz 1 zudem noethersch ist, folgt die Behauptung nun aus /14, Thm. 10.6/.

HILFSSATZ 3. Sei R_0 ein Integritätsbereich, dessen Quotientenkörper K ein algebraischer Zahlkörper ist. Ferner sei R der ganze Abschluß von R_0 in K . Dann existiert eine natürliche Zahl N mit $NR \leq R_0$.

Beweis: Sei J der Ring der ganzen Zahlen in K . Es existieren $j_1, \dots, j_k$ in J mit $J = \mathbb{Z}[j_1, \dots, j_k]$. Der Ring $R_0[j_1, \dots, j_k]$ ist dann nach Hilfssatz 2 ganz abgeschlossen, und ist somit gleich R . Folglich ist R ein endlich erzeugter R_0 -Modul. Daher genügt es zu zeigen, daß zu jedem r aus R eine natürliche Zahl N_r existiert mit $N_r \cdot r \in R_0$. Dies folgt aber daraus, daß K als Ring von $\mathbb{Q}$ und R_0 erzeugt wird.

HILFSSATZ 4. Sei R ein Dedekind-Ring, dessen Quotientenkörper K ein algebraischer Zahlkörper ist. Ferner sei I ein Ideal $\neq \{0\}$ von R . Dann gilt für jedes g aus $GL(n, K)$: $g(I^n) \leq I^n \Rightarrow g(R^n) \leq R^n$. Der Ring R/I ist endlich.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß R/I endlich ist. Es genügt, dies in dem Fall zu zeigen, daß I ein Primideal ist. Dann ist R_I ein (diskreter) Bewertungsring von K (nach /14, Th. 10.6/) und somit gilt $|R/I| = |R_I/(IR_I)| < \infty$. Zurück zum allgemeinen Fall: Hier gilt (+) Jedes t aus K mit $tI \leq I$ liegt in R .

Denn I ist dann auch Ideal in $R[t]$, und $R[t]$ ist ein Dedekind-Ring nach Hilfssatz 2. Also ist $R[t]/I$ endlich (nach dem eben Gezeigten). Mit I und $R[t]/I$ ist dann auch $R[t]$ ein noetherscher R -Modul. Folglich ist t ganz über R und liegt somit in R .

Die Behauptung folgt nun, indem man $(+)$ auf die Einträge der Matrix g anwendet.

HILFSSATZ 5. Sei $n \geq 2$ und R ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper K . Ferner sei A ein R -Modul in V , so daß $A \cap P$ für jeden eindimensionalen Teilraum P von V ein noetherscher R -Modul ist. Schließlich sei F eine fahnentransitive Untergruppe von $GL(V)$, welche A invariant läßt; ist $n=2$, so gelte $F_x \neq \{1\}$ für alle x aus V . Dann ist A ein noetherscher R -Modul.

Beweis: Sei Z der Zentralisator von F in der Endomorphismenalgebra $End(V)$ von V . Da F irreduzibel in V wirkt, ist Z eine Divisionsalgebra. Im Fall $n > 2$ impliziert die Fahnen-transitivität von F , daß Z nur aus Skalaren besteht. Im Fall $n=2$ folgt dies aus der Bedingung $F_x \neq \{1\}$; wäre nämlich $n=2$ und $\dim_K(Z) > 1$, so wäre Z eine quadratische Körpererweiterung von K und $F \subset Z$.

Es gilt also in jedem Fall $\dim_K(Z)=1$. Daraus folgt $[F]_K = End(V)$ (nach dem Dichtesatz für irreduzible Moduln, siehe /14, 4.3/). Man wähle nun $e_1, \dots, e_n$ aus $End(V)$ mit $id_V = e_1 + \dots + e_n$ und $V = Im(e_1) \oplus \dots \oplus Im(e_n)$. Dann existiert ein $r \neq 0$ aus R mit $re_i \in [F]_R$ (für $i=1, \dots, n$). Somit hat man $rA = (r id_V)(A) \leq (re_1)(A) + \dots + (re_n)(A) \leq (Im(e_1) \cap A) + \dots + (Im(e_n) \cap A)$. Folglich ist rA und damit auch A noethersch.

LEMMA 6. Sei $n \geq 2$ und K ein algebraischer Zahlkörper. Ferner sei F eine fahnentransitive Untergruppe von $GL(V)$, so daß $F_x \neq \{1\}$ für alle x aus V . Es sei R_0 der Teilring von K , so daß für alle $x \neq 0$ aus V gilt $R_0 = \{t \in K: tx \in [F(x)]_{\mathbb{Z}}\} = \{t \in K: t [F(x)]_{\mathbb{Z}} \leq [F(x)]_{\mathbb{Z}}\}$. Schließlich sei R der ganze Abschluß von R_0 in K . Dann ist R ein Hauptidealring und der Quotientenkörper von R (und R_0) in K ist gleich K . Für jedes $x \neq 0$ aus V ist $[F(x)]_R$ ein freier R -Modul vom Rang n .

Beweis: Nach Lemma 5 ist der Quotientenkörper von R_0 (und damit auch von R) in K gleich K . Sei $x \neq 0$ aus V und $A := [F(x)]_{\mathbb{Z}}$. Dann ist A ein R_0 -Modul in V und $A \cap Kx = R_0 x$. Da R_0 nach Hilfssatz 1 noethersch ist, greift somit Hilfssatz 5, und wir erhalten, daß A ein endlich erzeugter R_0 -Modul ist. Folglich ist $B := [A]_R$ ein endlich erzeugter R -Modul. Da R ein Dedekind-Ring ist (nach Hilfssatz 2), liefert nun der Hauptsatz über endlich erzeugte, torsionsfreie Moduln über Dedekind-Ringen, daß B direkte Summe von R -Moduln $M_1, \dots, M_n$ vom Rang 1 ist. Es gilt $M_1 = Iy_1$ für ein Ideal $I \neq \{0\}$ von R und ein y_1 aus V . Da F transitiv auf $G_1(V)$ wirkt, ist dann jedes M_i von der Form Iy_i für ein y_i aus V ($i = 1, \dots, n$). Wegen $B = Iy_1 + \dots + Iy_n$ und $V = Ky_1 + \dots + Ky_n$ folgt nun aus Hilfssatz 4, daß die Gruppe F auch den freien R -Modul $Ry_1 + \dots + Ry_n$ invariant läßt. Demnach ist R ein Hauptidealring gemäß Lemma 1 (denn R ist noethersch), und somit ist auch B ein freier R -Modul vom Rang n .

§5. SCHWACHE VERSIONEN DER SÄTZE 1 UND 2

Satz 1': Sei K unendliche algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers. Ist dann G eine fahnentransitive Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 3$, welche ein unipotentes Element $g \neq 1$ mit $\text{def}(g - \text{id}) > 1$ enthält, so ist die Gruppe $SL(n, K)$ in G enthalten.

Beweis: Die Voraussetzung überträgt sich auf die von G in einer Hyperebene von K^n induzierte Gruppe. Per Induktion genügt es demnach gemäß /19/, die Behauptung im Fall $n=3$ zu beweisen. In diesem Fall ist jedes unipotente Element $g \neq 1$ von G mit $\text{def}(g - \text{id}) > 1$ eine Transvektion. Da zudem jeder Teilring von K ein Körper ist, folgt nun aus Lemma 5, daß die Voraussetzungen von Lemma 3 und 4 für $R := K$ erfüllt sind. Somit enthält G alle Transvektionen aus $GL(3, K)$. Daraus folgt die Behauptung.

Ist R ein Ring und q aus R , so bezeichne $E(n, R, q)$ den von den Elementarmatrizen aus $\text{kern}[GL(n, R) \rightarrow GL(n, R/(q))]$ erzeugten Normalteiler von $GL(n, R)$; eine Elementarmatrix ist dabei eine Matrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen, welche außerhalb der Hauptdiagonalen genau einen von 0 verschiedenen Eintrag hat. Ist R ein Dedekind-Ring oder ein semi-lokaler Ring sowie $n \geq 3$, so ist diese Definition von $E(n, R, q)$ äquivalent der in Bass /2/ (siehe /2, Th.(4.2)(c)/).

Satz 2'. Sei K ein algebraischer Zahlkörper. Ferner sei G eine fahnentransitive Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 3$, welche ein unipotentes Element $g \neq 1$ mit $\text{def}(g - \text{id}) > 1$ enthält. Dann existiert ein Hauptidealring R mit Quotientenkörper K , ein $q \neq 0$ aus R und eine zu G konjugierte Untergruppe G_1 von $GL(n, K)$ mit $E(n, R, q) \leq G_1 \leq K^* GL(n, R)$.

Beweis: Sei $X := K^{n-1}$ als Hyperebene von K^n aufgefaßt (vermöge $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$). Im Fall $n > 3$ können wir per Induktion annehmen, daß für ein $m \neq 0$ aus $\mathbb{Z}$ gilt: Die von G_X in X induzierte Gruppe enthält $E(n-1, \mathbb{Z}, m)$. Eine einfache Rechnung (siehe /2, Cor.(1.3)/) zeigt, daß $E(n-1, \mathbb{Z}, m^2)$ in der Kommutatorgruppe von $E(n-1, \mathbb{Z}, m)$ enthalten ist. Somit können wir im Fall $n > 3$ annehmen, daß G_X eine Untergruppe U hat, welche in X die Gruppe $E(n-1, \mathbb{Z}, m^2)$ induziert und in K^n/X trivial wirkt. Wirkt U zudem treu in X , so enthält U nach Lemma 2 eine Transvektion; andererseits enthält die Gruppe U aber auch eine Transvektion, falls sie nicht treu in X wirkt, da jedes Element $\neq 1$ aus dem Kern der Wirkung von U in X eine Transvektion ist.

Da im Fall $n=3$ jedes unipotente Element $g \neq 1$ von G mit $\text{def}(g-\text{id}) > 1$ eine Transvektion ist, können wir also in jedem Fall annehmen, daß G eine Transvektion enthält.

Für eine Hyperebene H von K^n betrachten wir nun die Gruppe $\bar{G}_H$ (definiert wie in Lemma 3). Wendet man Lemma 6 auf die von $\bar{G}_H$ in H induzierte Gruppe F an, so erhält man einen Hauptidealring R , welcher die Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt. Der dort konstruierte R -Modul A ist dann nach Hilfssatz 5 endlich erzeugt, und ist somit ein freier R -Modul vom Rang n (nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen). Nach Hilfssatz 3 ist zudem die Voraussetzung von Lemma 4 erfüllt. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3 und 4.

§6. DIE EXISTENZ VON UNIPOTENTEN ELEMENTEN UND DER BEWEIS VON SATZ 1

HILFSSATZ 6. Sei K ein algebraischer Zahlkörper oder $\text{char}(K) \neq 0$; ferner $n \geq 3$. Ist dann F die Invarianzgruppe in $\text{GL}(V)$ einer Polarität auf V , so wirkt F nicht fahnen transitiv in V .

Beweis: Kommt die Polarität von einer alternierenden Bilinearform her, so ist F sicher nicht fahnen transitiv. Wir können also annehmen, daß die Polarität durch eine hermite'sche Form auf V beschrieben wird. Sei J der zugehörige Automorphismus von K . Nach [20, Satz 1] wirkt F höchstens dann fahnen transitiv, wenn die Gruppe der Normen tt^J ($t \in K^*$) additiv abgeschlossen ist. Diese Bedingung ist im Fall $\text{char}(K) \neq 0$ sicher nicht erfüllt (da die Zahl 1 stets Norm ist). Sei also nun angenommen, daß K ein algebraischer Zahlkörper ist. Ferner sei k der Fixkörper von J .

Nach Hasse [10, §24, Teil 1, I] gibt es unendlich viele Primideale Q des Rings der ganzen Zahlen in k , so daß $P := R_Q$ ein Primideal im Ring R der ganzen Zahlen von K ist. Also kann $Q \neq \{0\}$ so gewählt werden, daß die Primzahl $p := \text{char}(R/P)$ unverzweigt in K ist. Dann ist die Ordnung $v_p(p)$ von p bzgl. P gleich 1. Folglich kann p nicht von der Form tt^J ($t \in K^*$) sein, da $v_p(tt^J) = v_p(t) + v_p(t^J) = v_p(t) + v_{J(p)}(t^J) = 2 v_p(t) \in 2 \mathbb{Z}$. Also ist die Gruppe der Normen nicht additiv abgeschlossen.

HILFSSATZ 7. Sei K ein unendlicher Körper und U ein 2-dimensionaler K -Vektorraum. Ferner sei F eine fahnen transitive, auflösbare Untergruppe von $GL(U)$, welche das Zentrum von $GL(U)$ enthält. Dann existiert ein Teilkörper L der Endomorphismenalgebra von U mit $[L:K] = 2$, und ein Element γ des Normalisators Γ von L in $GL(U)$ mit $\gamma^2 = 1$, so daß gilt $\Gamma = \langle \gamma \rangle L^* = \langle \gamma \rangle F$. Ist $\text{char}(K) \neq 2$, so enthält F kein unipotentes Element $\neq 1$.

Beweis: Die Theorie der algebraischen Gruppen liefert einen Normalteiler F_0 von F von endlichem Index mit unipotenter Kommutatorgruppe F_0' . Die unipotente Gruppe F_0' stabilisiert eine Fahne in U , und dann sogar - da invariant unter der fahnen transitiven Gruppe F - jede Fahne in U . Also ist F_0' trivial und F_0 abelsch. Folglich erzeugt F_0 eine kommutative

Unteralgebra L der Endomorphismenalgebra von U . Der Kern eines jeden Elements von L ist invariant unter F_0 , und hat somit endliche Bahn unter F . Folglich ist L nullteilerfrei und ist somit ein Körper. Die Existenz eines γ aus Γ mit $\gamma^2 = 1$ und $\Gamma = \langle \gamma \rangle L^*$ ist klar (da Γ die Gruppe der L -semi-linearen Abbildungen f von U ist, so daß der zu f gehörige Automorphismus von L in $\text{Gal}(L|K)$ liegt). Da F eine auf $U \setminus \{0\}$ transitive Untergruppe von Γ und $\langle \gamma \rangle$ die Standgruppe eines $x \in U \setminus \{0\}$ in Γ ist, folgt $\Gamma = \langle \gamma \rangle F$. Ist schließlich f ein unipotentes Element von Γ , so liegt f^2 in L^* und die Beziehung $(f^2 - 1)^2 = 0$ impliziert $f^2 = 1$; im Fall $\text{char}(K) \neq 2$ folgt daraus $f = 1$.

LEMMA 7. Sei Z ein 5-dimensionaler K -Vektorraum und G eine fahnentransitive Untergruppe von $\text{GL}(Z)$, welche ein Element h mit $\text{def}(h - \text{id}) = \text{def}[(h - \text{id})^2] = 3$ enthält. Ferner enthalte die Kommutatorgruppe von G kein unipotentes Element $u \neq 1$ mit $\text{def}(u - \text{id}) > 1$. Dann läßt G eine Polarität auf Z invariant.

Beweis: Sei U bzw. W das Bild bzw. der Kern von $h - \text{id}$. Dann gilt $Z = U \oplus W$. Für jedes Element g von G_U mit $g|_U = \text{id}$ gilt ferner $g(W) = W$; denn der Kommutator $u = [g, h]$ ist unipotent mit $\text{def}(u - \text{id}) > 1$, also $u = 1$, und somit läßt g den Eigenraum W von h invariant. Diese Eigenschaften charakterisieren W relativ U :

(1) Ist W' ein Teilraum von Z mit $Z = U \oplus W'$ und

$$\{g \in G_U : g|_U = \text{id}\} \leq G_{W'}, \text{ so gilt } W = W' :$$

Es existiert nämlich ein 3-dimensionaler Teilraum X von Z mit $U \leq X \leq U + (W \cap W')$, sowie ein g aus G mit $X = \text{kern}(g - \text{id}) = \text{kern}[(g - \text{id})^2]$. Dann hat man $g|_U = \text{id}$, also $g(W') = W'$ und somit $Y := \text{Im}(g - \text{id}) \leq W'$; desgleichen $Y \leq W$. Dies ergibt $Z = X + Y \leq U + (W \cap W')$. Daraus folgt $W = W'$.

(2) Für alle f aus G_U gilt $f(W) = W$:

Dies folgt aus (1). Denn mit W ist auch $f(W)$ ein Teilraum von Z mit den entsprechenden Eigenschaften.

(3) Jeder Teilraum T von Z der Dimension 2 oder 3 hat ein G_T -invariantes Komplement T^0 in Z :

Im Fall $\dim T = 2$ folgt dies aus (2). Den Fall $\dim T = 3$ erhält man dann durch Dualisieren (d.h. Betrachten der Wirkung von G im Dualraum von Z).

(4) Es ist T^0 durch T eindeutig bestimmt, und es gilt $(T^0)^0 = T$: Dies folgt aus der Existenz des Elements h in der Voraussetzung von Lemma 7.

(5) Für alle 2-dimensionalen Teilräume S, T von Z gilt:

$$\dim(S+T) = 3 \Rightarrow \dim(S^0 \cap T^0) = 2.$$

Sei nämlich angenommen, daß $\dim(S+T) = 3$. Wählt man nun ein g aus G mit $T = \text{Im}(g - \text{id}) = \text{Im}[(g - \text{id})^2]$, so läßt g den Raum $S+T$ invariant; also läßt g auch den Raum $(S+T)^0$ invariant und somit gilt $(S+T)^0 \subseteq T^0$. Analog erhält man $(S+T)^0 \subseteq S^0$. Also gilt $(S+T)^0 \subseteq S^0 \cap T^0$ und daher $\dim(S^0 \cap T^0) \geq 2$. Wegen $S^0 \neq T^0$ folgt daraus $\dim(S^0 \cap T^0) = 2$.

Nach (3), (4) und (5) ist die Abbildung $T \mapsto T^0$ eine Bijektion von $\underline{G}_2(Z)$ auf $\underline{G}_3(Z)$, welche die Relation "adjacence" erhält. Nach Chow /6, Thm. 1/ kommt diese Abbildung somit von einer Dualität auf Z her. Wegen $(T^0)^0 = T$ (für alle T aus $\underline{G}_2(Z)$) ist diese Dualität sogar eine Polarität. Diese Polarität ist offenbar invariant unter der Gruppe G .

LEMMA 8. Sei K ein algebraischer Zahlkörper oder ein unendlicher Körper positiver Charakteristik. Ferner sei $n \geq 5$ und G eine fahnentransitive Untergruppe von $GL(V)$. Dann enthält die Gruppe $K * G$ ein unipotentes Element $u \neq 1$ mit $\text{def}(u - \text{id}) > 1$.

Beweis: Wir können annehmen $K * G = G$. Sei U ein 2-dimensionaler Teilraum von V und H die Standgruppe in G_U einer Fahne in V/U . Dann wirkt H noch fahnentransitiv in U . Wir zeigen zunächst:

(1) Die Gruppe H ist nicht auflösbar, falls $\text{char}(K) \neq 2$:
 Enthält nämlich G ein unipotentes Element $\neq 1$, so auch die von H in U induzierte Gruppe F (da G fahnentransitiv ist) und dann folgt (1) aus Hilfssatz 7. Wir können also annehmen, daß G kein unipotentes Element $\neq 1$ enthält. Dann ist die Standgruppe in G einer jeden Fahne abelsch (da der Kommutator zweier oberer Dreiecksmatrizen unipotent ist). Würde diese Standgruppe nicht nur aus Elementen der Form skalar mal unipotent bestehen, so müßte G nach Völklein /20, Satz 3(b)/ eine Polarität auf V invariant lassen. Dies ist aber nach Hilfssatz 6 nicht möglich. Folglich enthält die Standgruppe in G einer Fahne nur Elemente der Form skalar mal unipotent, und damit sogar nur Skalare (nach obiger Annahme).

Sei nun $\text{char}(K) \neq 2$ und H auflösbar. Dann liegt die Situation von Hilfssatz 7 vor (für $F := \text{Bild von } H \text{ in } GL(U)$). Es gilt $L = K(d)$ mit $d^2 \in K$. Wegen $\Gamma = \langle \gamma \rangle F$ liegt d oder γd in F . Ist nun h aus H mit $h|_U = d$ oder $h|_U = \gamma d$, so gilt $h^2|_U = \pm d^2 \in K^*$; folglich stabilisiert das Element h^2 eine Fahne in V und ist somit ein Skalar. Nun hat h einen Eigenwert $t \in K$, und wir erhalten $t^2 = \pm d^2$. Wegen $L = K(d)$ kann der Fall $t^2 = d^2$ nicht auftreten, also $t^2 = -d^2$ und $L = K(\sqrt{-1})$. Wir können somit annehmen $d^2 = -1$ und $h|_U = \gamma d$. Wegen $(\gamma d)^2 = (\gamma d \gamma^{-1})d = -d^2 = 1$ induziert dann h eine Involution in U , stabilisiert demnach eine Fahne in V und ist somit ein Skalar. Dieser Widerspruch beendet den Beweis von (1).

Wir nehmen nun an, die Behauptung sei falsch, d.h.

(2) Jedes unipotente Element u von G mit $\text{def}(u - \text{id}) > 1$ ist trivial.

Dann gilt: (3) Die Gruppe H enthält ein Element h mit

$$V = U \oplus \text{kern}(h - \text{id}) .$$

Die n -te Derivierte $H^{(n)}$ von H wirkt nämlich trivial in V/U , also $V = U \oplus \text{kern}(h - \text{id})$ für alle h aus $H^{(n)}$ mit $\text{kern}(h|_U - \text{id}_U) = \{0\}$. Ist andererseits $\text{kern}(h|_U - \text{id}_U) \neq \{0\}$, so ist h unipotent (da $\det h = 1$) und $\text{def}(h - \text{id}) > 1$; also $h = 1$ nach (2). Jedes $h \neq 1$ aus $H^{(n)}$ leistet somit das Verlangte.

Zufolge (1) bleibt also nur der Fall $\text{char}(K)=2$ zu untersuchen. In diesem Fall gilt $h^q|_{V/U} = \text{id}$ für $q := 2^n$ und $h \in H'$ ($:=$ Kommutatorgruppe von H); wie eben erhält man daraus, daß entweder $V = U \oplus \text{kern}(h^q - \text{id})$ oder $h^q = 1$. Ist $h^q = 1$, so ist h unipotent, und somit $h=1$ oder $\text{def}(h - \text{id}) = 1$; der Fall $\text{def}(h - \text{id}) = 1$ kann aber nicht auftreten, da dann $h^2 \neq 1$, $\text{def}(h^2 - \text{id}) = 2$ gelten würde.

Wir sehen also, daß $V = U \oplus \text{kern}(h^q - \text{id})$ für alle $h \neq 1$ aus H' . Somit können wir annehmen, daß H abelsch ist. Ist dann h ein Element von H , welches nichtskalar in U wirkt, so hat h keinen Eigenvektor in U ; ferner ist das Element $h|_{V/U}$ von der Form skalar mal unipotent, da die Gruppe G_U andernfalls eine Polarität auf V/U invariant lassen würde (nach Völklein /20, Satz 3(b)), im Widerspruch zu Hilfssatz 6. Folglich existiert ein t aus K^* mit $V = U \oplus \text{kern}(th^q - \text{id})$. Dies zeigt (3).

Sei nun Z ein 5-dimensionaler Teilraum von V , und sei G_0 die Standgruppe in G_Z einer Fahne in V/Z . Die von G_0 in Z induzierte Gruppe erfüllt dann die Voraussetzungen von Lemma 7 (zufolge (2) und (3)), und somit erhalten wir eine G_0 -invariante Polarität auf Z . Dies widerspricht Hilfssatz 6. Damit ist die Annahme (2) zum Widerspruch geführt.

BEMERKUNG. Der obige Beweis zeigt, daß Lemma 8 allgemeiner für alle Körper K gilt, welche auf K^m , $m \geq 3$, keine Polarität mit fahnentransitiver Invarianzgruppe zulassen.

Beweis von Satz 1: Sei K algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers und G eine fahnentransitive Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 5$. Ist K unendlich, so folgt aus Satz 1' und Lemma 8, daß die Gruppe $SL(n, K)$ in $K^* G$ enthalten ist; für endliches K folgt dies aus Higman /11/. Durch Bildung der Kommutatorgruppen erhalten wir schließlich:
 $SL(n, K) = (SL(n, K))' \leq (K^* G)' \leq G$.

§7. FAHNENTRANSITIVE GRUPPEN ÜBER ENDLICHEN RINGEN UND DER BEWEIS VON SATZ 2

Um auch mit den Quotientenringen der in Satz 2' auftretenden Hauptidealringe arbeiten zu können, benötigen wir die folgende Ausweitung des Begriffs "fahnentransitiv" :

DEFINITION. Für jeden Ring R bezeichne $T(n, R)$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen aus $GL(n, R)$. Eine Untergruppe G von $GL(n, R)$ heiße fahnentransitiv, falls $T(n, R) G = GL(n, R)$.

HILFSSATZ 8. Für jeden kommutativen endlichen Ring R ist die Gruppe $SL(n, R)$ kommutatorgleich, falls $n \geq 3$.
 Ist R homomorphes Bild eines Rings R_0 und $f: GL(n, R_0) \rightarrow GL(n, R)$ die induzierte Abbildung, so gilt: Für jede fahnentransitive Untergruppe G von $GL(n, R_0)$ ist $f(G)$ eine fahnentransitive Untergruppe von $GL(n, R)$.

Beweis: Nach Bass /2, Prop.(5.1)(a)/ gilt $SL(n, R) = E(n, R, 1)$ (da R semi-lokal ist). Folglich ist $SL(n, R)$ kommutatorgleich (siehe /2, Cor.(1.3)/) und $SL(n, R) \leq f(GL(n, R_0))$. Für jede fahnentransitive Untergruppe G von $GL(n, R_0)$ gilt somit:
 $GL(n, R) = T(n, R) f(GL(n, R_0)) = T(n, R) f(T(n, R_0)) f(G) =$
 $= T(n, R) f(G)$.

LEMMA 9. Sei R ein kommutativer, endlicher, lokaler Ring, so daß das maximale Ideal von R ein Hauptideal ist. Dann enthält jede fahnentransitive Untergruppe G von $GL(n, R)$, $n \geq 5$, die Gruppe $SL(n, R)$.

Beweis: Sei a ein Erzeuger des maximalen Ideals von R . Dann ist $a^r = 0$ für eine natürliche Zahl r , und die Ideale von R sind genau die Ra^m , $1 \leq m \leq r$. Sei nun r minimal mit $a^r = 0$. Wir verwenden Induktion nach r .

Der Fall $r=1$ ist in Satz 1 enthalten. Sei also nun $r > 1$ angenommen. Es bezeichne N bzw. M den Kern der kanonischen Abbildung von $GL(n, R)$ nach $GL(n, R/(a^{r-1}))$ bzw. nach $GL(n, R/(a^m))$, wo $m := \max(1, r-2)$. Nach Hilfssatz 8 ist das Bild von G in $GL(n, R/(a^{r-1}))$ fahnentransitiv. Wir können also per Induktion annehmen, daß dieses Bild die Gruppe $SL(n, R/(a^{r-1}))$ enthält; somit $N \cap G \geq SL(n, R)$. Nach Hilfssatz 8 gilt dann sogar $N \cap G_0 \geq SL(n, R)$, wo $G_0 := G \cap SL(n, R)$ (denn $N \cap G_0$ ist ein Normalteiler von $N \cap G$ mit abelscher Faktorgruppe).

Jedes Element von N bzw. M schreibt sich als $1 + a^{r-1}X$ bzw. $1 + a^m X$, X eine $n \times n$ -Matrix über R . Daran sieht man, daß N im Zentrum von M liegt. Wegen $N \cap G \geq SL(n, R)$ wird somit die Gruppe $M \cap G$ von $SL(n, R)$ normalisiert. Nach Bass /2, Th. (4.2)(e) und Prop. (5.1)(a)/ ist also $M \cap G$ entweder im Zentrum von $GL(n, R)$ enthalten oder enthält die Gruppe $N \cap SL(n, R)$. Im letzteren Fall gilt:
 $SL(n, R) = (N \cap SL(n, R)) \cap G_0 \leq G$. Wir können also annehmen, daß $M \cap G$ im Zentrum von $GL(n, R)$ enthalten ist. Dann hat man $E(n, R, a^m) \leq M \cap SL(n, R) \leq N \cap (M \cap G) \leq R^* N$ (man beachte $SL(n, R) \leq N \cap G$). Die Beziehung $E(n, R, a^m) \leq R^* N$ impliziert aber $m \geq r-1$, d.h. $r=2$.

Dann ist G_0 eine zentrale Erweiterung der Gruppe $SL(n, R/(a))$. Nach Griess /9/ ist aber $SL(n, R/(a))$ die Darstellungsgruppe von $PSL(n, R/(a))$ (da $n \geq 5$) und hat somit trivialen Schur-Multiplikator. Folglich ist die Gruppe G_0 das direkte Produkt ihrer Kommutatorgruppe G_1 mit $N \cap G_0$. Dann ist die

Gruppe $SL(n, R)$ N semidirektes Produkt von G_1 und N .

Die Einheitengruppe von R enthält ein Element x der Ordnung $k := |R/(a)| - 1$. Wir betrachten nun den Fall, daß der Primring P von R ein Körper ist. Dann ist $L := P[x]$ ein Körper. Denn x erfüllt die separable Gleichung $X^k - 1 = 0$ über P , und somit ist $P[x]$ eine direkte Summe von Körpern; folglich hat $P[x]$ trivialen Schnitt mit dem nilpotenten Ideal aR und ist somit isomorph zu einem Teilring von $R/(a)$. Jeder solche Teilring ist aber ein Körper. Es ist dann $R = L + aR$, und somit ist $GL(n, R)$ semidirektes Produkt von $GL(n, L)$ und N (da $r=2$). Insbesondere ist die Gruppe $SL(n, R)$ N semidirektes Produkt von $SL(n, L)$ und N . Oben hatten wir gesehen, daß $SL(n, R)$ N semidirektes Produkt von G_1 und N ist. Wegen $H^1(SL(n, L), N) = 0$ (siehe Taussky/Zassenhaus /18, Thm.9/) folgt daraus, daß G_1 und $SL(n, L)$ unter $GL(n, R)$ konjugiert sind. Wir können also annehmen $G_1 = SL(n, L)$ (Man ersetze evtl. G durch ein Konjugiertes). Dann hat man

$$|G_1| |N| \leq |GL(n, R)| = |G| |T(n, R)| |G \cap T(n, R)|^{-1} \leq$$

$$|G| |T(n, R)| |SL(n, L) \cap T(n, R)|^{-1} \leq$$

$$|G_0| |R^*| |T(n, R)| |T(n, L)|^{-1} |L^*| \leq$$

$$|G_1| |R^*|^2 |T(n, R) \cap N| |L^*|, \text{ also}$$

$$|N| \leq |L|^5 |T(n, R) \cap N|. \text{ Dies kann aber nicht gelten, da}$$

$$|N| = |L|^{n^2} \text{ und } |T(n, R) \cap N| = |L|^{n(n+1)/2} \text{ und } n \geq 5.$$

Somit bleibt nun der Fall zu behandeln, daß P kein Körper ist. Dann ist P isomorph $\mathbb{Z}/(p^2)$ für eine Primzahl p (da $r=2$). Es bezeichne R_0 den Teilring $P + aR$ von R , und I sei eine Untergruppe der additiven Gruppe von aR mit $aR = I \oplus pP$ (Ein solches I existiert, da aR eine elementarabelsche Gruppe ist). Dann ist I ein Ideal von R_0 und R_0/I ist isomorph P . Bezeichnet ferner f die kanonische Abbildung von $GL(n, R_0)$ nach $GL(n, R_0/I)$ und ist $H := G \cap GL(n, R_0)$, so folgt aus dem untenstehenden Lemma 10, daß $SL(n, R_0/I) \leq f(H)$; also $SL(n, R_0) \leq H \text{ kern}(f)$ und somit

$SL(n, R_0) \cap N \leq (H \cap N) \text{ kern}(f) \leq (G \cap N) \text{ kern}(f) \leq R^* \text{ kern}(f)$.
Nun ist die Gruppe $\text{kern}(SL(n, P) \rightarrow SL(n, P/pP))$ in der Gruppe $SL(n, R_0) \cap N$ enthalten, wird aber unter f nicht ins Zentrum von $SL(n, R_0/I)$ abgebildet. Dieser Widerspruch beendet den Beweis von Lemma 9.

LEMMA 10. Sei p eine Primzahl und F eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{Z}/(p^2))$, $n \geq 5$, so daß das Bild von F in $GL(n, \mathbb{Z}/(p))$ die Gruppe $SL(n, \mathbb{Z}/(p))$ enthält. Dann enthält F die Gruppe $SL(n, \mathbb{Z}/(p^2))$.

Beweis: Verfährt man wie im Beweis von Lemma 9, so sieht man, daß nur der folgende Fall auszuschließen ist:

(+) Die Gruppe $SL(n, \mathbb{Z}/(p^2)) \bar{N}$ zerfällt über $\bar{N}$, wo

$$\bar{N} := \text{kern}[GL(n, \mathbb{Z}/(p^2)) \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}/(p))] 1.$$

In Beisiegel /4/ wird gezeigt, daß $GL(n, \mathbb{Z}/(p^2))$ nicht über $\bar{N}$ zerfällt; der Beweis dieses Resultats zeigt auch (+).

LEMMA 11. Sei R ein Ring, welcher die direkte Summe der endlichen Körper $K_1, \dots, K_s$ ist. Dann enthält jede fahnentransitive Untergruppe G von $GL(n, R)$, $n \geq 5$, die Gruppe $SL(n, R)$.

Beweis: Wir verwenden Induktion nach s . Der Fall $s=1$ ist in Satz 1 enthalten. Sei also nun $s > 1$ angenommen. Ferner sei $R_2 := K_2 \oplus \dots \oplus K_s$, und es bezeichne f_1 bzw. f_2 die kanonische Abbildung von $GL(n, R)$ nach $GL(n, K_1)$ bzw. nach $GL(n, R_2)$. Nach Hilfssatz 8 ist $f_2(G)$ fahnentransitiv, und wir können somit per Induktion annehmen, daß $SL(n, R_2) \leq f_2(G)$; ebenso $SL(n, K_1) \leq f_1(G)$. Für $G_0 := G \cap SL(n, R)$ gilt dann $SL(n, R_2) = f_2(G_0)$, und somit genügt es zu zeigen:
(+) $SL(n, R) \cap \text{kern}(f_2) \leq G_0$.

Es ist $f_1(G \cap \text{kern}(f_2))$ eine Untergruppe von $GL(n, K_1)$, welche von $SL(n, K_1)$ normalisiert wird. Demnach ist diese Gruppe entweder im Zentrum Z_1 von $GL(n, K_1)$ enthalten oder enthält die Gruppe $SL(n, K_1)$. Im letzteren Fall gilt (+).

Wir können somit annehmen: $(++) \quad f_1(G \cap \text{kern}(f_2)) \leq Z_1$.

Wir betrachten zunächst den Fall $s > 2$. Es ist $N := f_2(G_0 \cap \text{kern}(f_1))$ ein Normalteiler von $SL(n, R_2)$, so daß die Faktorgruppe homomorphes Bild von $SL(n, K_1)$ ist; wegen $s > 2$ kann also N nicht im Zentrum von $SL(n, R_2)$ enthalten sein. Nach Bass /2, (4.2)(e) und (5.1)(a)/ enthält dann N die Gruppe $SL(n, R_2) \cap \text{kern}(h_j)$ für ein j mit $2 \leq j \leq s$; dabei bezeichne h_j die kanonische Abbildung von $GL(n, R_2)$ in $GL(n, \bigoplus_{i \neq 1, i \neq j} K_i)$. (Man beachte, daß jedes Ideal von R_2 das Produkt gewisser K_i ist). Für $f_{2,j} := h_j \circ f_2$ gilt somit $f_2(G_0 \cap \text{kern}(f_2, j)) \leq SL(n, R_2) \cap \text{kern}(h_j) \leq N$, also $G_0 \cap \text{kern}(f_{2,j}) \leq (G_0 \cap \text{kern}(f_1)) (G_0 \cap \text{kern}(f_2))$ und damit $f_1(G_0 \cap \text{kern}(f_{2,j})) \leq f_1(G_0 \cap \text{kern}(f_2)) \leq Z_1$ (nach $(++)$). Dann muß auch $f_1(G \cap \text{kern}(f_{2,j}))$ in Z_1 enthalten sein. Dies widerspricht aber der Induktionsvoraussetzung, wonach das Bild von G in $GL(n, \bigoplus_{i \neq j} K_i)$ die Gruppe $SL(n, \bigoplus_{i \neq j} K_i)$ enthält.

Es bleibt also nur der Fall $s=2$ zu untersuchen. Es folgt dann aus $(++)$, daß die Gruppen $PSL(n, K_1)$ und $PSL(n, K_2)$ isomorph sind; also sind auch die Körper K_1 und K_2 isomorph (siehe /17/). Sei $q := |K_1| = |K_2|$. Aus $(++)$ folgt die Teilbarkeitsbeziehung $|G| \parallel (q-1) |GL(n, K_2)|$. (Der Übersichtlichkeit halber verwenden wir $\parallel$ anstelle des sonst üblichen $|$ für die Teilbarkeitsrelation). Dies ergibt

$$\begin{aligned} |GL(n, K_1)|^2 &= |GL(n, R)| \parallel |G| |T(n, R)| \parallel \\ (q-1) |GL(n, K_1)| |T(n, R)| &\quad , \text{also} \\ q^{n(n-1)/2} (q^{n-1}-1) \dots (q-1) &= |GL(n, K_1)| \parallel (q-1) |T(n, R)| \\ = (q-1) |T(n, K_1)|^2 &= q^{n(n-1)} (q-1)^{2n+1} \quad , \text{somit} \\ (q^{n-1}-1) \dots (q-1) &\parallel (q-1)^{2n+1} \quad . \text{Nun ist aber} \\ (q-1)^{2n+1} &= (q-1)^n (q-1)^{n-1} (q-1)^2 < (q^{n-1}-1)(q^{n-1}-1)(q^2-1) \quad . \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch beendet den Beweis von Lemma 11.

SATZ 3. Sei R ein kommutativer endlicher Ring, so daß jedes Ideal von R ein Hauptideal ist. Dann enthält jede fahnen-transitive Untergruppe G von $GL(n, R)$, $n \geq 5$, die Gruppe $SL(n, R)$.

Beweis: Es ist R die direkte Summe lokaler Ringe $R_1, \dots, R_s$ (siehe /14, Th. 7.13/). Sei K_i der Restklassenkörper von R_i ($i = 1, \dots, s$). Wir verwenden Induktion nach s . Der Fall $s=1$ wurde in Lemma 9 behandelt. Sei also nun $s > 1$ angenommen. Ferner bezeichne $f_2: GL(n, R) \rightarrow GL(n, R_2 \oplus \dots \oplus R_s)$ bzw. $h: GL(n, R_2 \oplus \dots \oplus R_s) \rightarrow GL(n, K_2 \oplus \dots \oplus K_s)$ bzw. $f_1: GL(n, R) \rightarrow GL(n, R_1)$ bzw. $h_1: GL(n, R_1) \rightarrow GL(n, K_1)$ die kanonische Abbildung (für $i = 1, \dots, s$). Man sieht wie im Beweis von Lemma 11, daß es genügt, zu zeigen: $f_1(G \cap \ker(f_2)) \geq SL(n, R_1)$.

Nach Hilfssatz 8 und Lemma 11 enthält das Bild von G in $GL(n, K_1 \oplus \dots \oplus K_s)$ die Gruppe $SL(n, K_1 \oplus \dots \oplus K_s)$. Folglich gilt $h_1 f_1(G \cap \ker(h f_2)) \geq SL(n, K_1)$. Dann gilt auch $h_1 f_1(G \cap \ker(f_2)) \geq SL(n, K_1)$, da die Gruppe $\ker(h f_2) / \ker(f_2)$ isomorph der auflösbaren Gruppe $\ker(h)$ ist. (Man beachte, daß $\ker(h)$ direktes Produkt der p_i -Gruppen $\ker(h_i)$, $i = 2, \dots, s$, ist, wo $p_i := \text{char}(K_i)$). Da die Gruppe $f_1(G \cap \ker(f_2))$ zudem von $SL(n, R_1)$ normalisiert wird (wegen $SL(n, R_1) \leq f_1(G)$), folgt nun aus Bass /2, (4.2)(e) und (5.1)(a)/, daß $f_1(G \cap \ker(f_2)) \geq SL(n, R_1)$. Dies war zu zeigen.

Beweis von Satz 2: Sei nun K ein algebraischer Zahlkörper und G eine fahnen-transitive Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 5$. Zuvor Lemma 8 und Satz 2' können wir annehmen, daß ein Hauptidealring R mit Quotientenkörper K und ein $q \neq 0$ aus R existieren mit $E(n, R, q) \leq K^* G \leq K^* GL(n, R)$. Mit G ist dann auch $G_0 := (K^* G) \cap GL(n, R)$ eine fahnen-transitive Untergruppe von $GL(n, K)$. Dann ist G_0 auch fahnen-transitiv als Untergruppe von $GL(n, R)$ (im Sinne der Definition zu Beginn dieses Paragraphen). Bezeichnet also f die kanonische Abbildung von $GL(n, R)$ nach $GL(n, R/(q))$, so gilt

$SL(n, R/(q)) \leq f(G_0)$ nach Hilfssatz 4, Hilfssatz 8 und Satz 3. Für die Gruppe $H := G_0 \cap SL(n, R)$ gilt dann $f(H) = SL(n, R/(q))$ (da die Gruppe $SL(n, R/(q))$ kommutatorgleich ist, siehe Hilfssatz 8). Für die Gruppe $SL(n, R, q) := \text{kern}(f) \cap SL(n, R)$ hat man somit:

(1) $SL(n, R, q) H = SL(n, R)$

Wir benötigen nun: (2) $E(n, R, 1) = SL(n, R)$. Dies folgt aus Bass/Milnor/Serre /3, Cor. 4.3(a)/, falls R von "arithmetischem Typ" ist. Im allgemeinen Fall verwendet man, daß für je endlich viele Elemente von R ein Teilring A von R von "arithmetischem Typ" existiert, welcher diese Elemente enthält. (Die Existenz von A folgt daraus, daß R als Durchschnitt von Bewertungsringen von K geschrieben werden kann).

Mit (2) erhalten wir nun aus Bass /2, Th. (4.2)(d)/ die folgende Kommutatorformel:

$$(3) \quad [SL(n, R), SL(n, R, q)] \leq E(n, R, q)$$

Wegen $E(n, R, q) \leq H$ folgt nun aus (1) und (3), daß H ein Normalteiler von $SL(n, R)$ ist. Nach Bass /2, Th. (4.2)(e)/ existiert also ein q' aus R mit $E(n, R, q') \leq H$, so daß H in das Zentrum von $GL(n, R/(q'))$ abbildet. Andererseits sieht man wie oben, daß H surjektiv auf $SL(n, R/(q'))$ abbildet (falls $q' \notin R^*$). Folglich ist q' eine Einheit von R und es gilt somit $SL(n, R) = E(n, R, 1) = E(n, R, q') \leq H$. Zuzufolge (2) ist $SL(n, R)$ kommutatorgleich (siehe /2, (1.5)(i)/) und wir erhalten schließlich durch Bildung der Kommutatorgruppen: $SL(n, R) = (SL(n, R))' \leq H' \leq G$.

Damit ist gezeigt, daß die in Satz 2 angegebene Bedingung notwendig ist. Daß die Bedingung auch hinreichend ist, folgt aus Lemma 1.

Beweis von Korollar 0: Nach Satz 2 ist nur zu zeigen, daß für jeden Hauptidealring R mit Quotientenkörper K gilt:

$$(K^* GL(n, R)) \cap SL(n, K) = SL(n, R) .$$

Dies folgt aber daraus, daß R (in K) ganz abgeschlossen ist.

Beweis von Korollar 1: Die Gruppe G ist nach Lemma 1

fahnen transitiv. Nach Satz 2' existiert somit ein Hauptidealring R mit Quotientenkörper K , ein $q \neq 0$ aus R und ein g aus $GL(n, K)$ mit $E(n, R, q) \leq g G g^{-1} \leq K^* GL(n, R)$. Dann ist R_0 in R enthalten, da $g SL(n, R_0) g^{-1} \leq (g G g^{-1}) \cap SL(n, K) \leq (K^* GL(n, R)) \cap SL(n, K) = SL(n, R)$, und somit

$$R_0 = \{sp(h) : h \in SL(n, R_0)\} \subseteq \{sp(h) : h \in SL(n, R)\} = R .$$

(Dabei bezeichnet $sp(h)$ die Spur der Matrix h).

Wir zeigen nun $g \in K^* GL(n, R)$. Sei $x := (1, 0, \dots, 0) \in R^n$.

Da $GL(n, R)$ transitiv auf der Menge der eindimensionalen Teilräume von K^n wirkt, können wir annehmen $g(x) = x$.

Die Gruppe $g SL(n, R_0) g^{-1}$ ist in $SL(n, R)$ enthalten und wirkt transitiv auf der Menge der eindimensionalen Teilräume von K^n ; folglich gilt $[(g SL(n, R_0) g^{-1})(x)]_R = R^n$.

Andererseits hat man

$$[(g SL(n, R_0) g^{-1})(x)]_R = g([SL(n, R_0)(x)]_R) = g(R^n) .$$

Also $R^n = g(R^n)$ und somit $g \in GL(n, R)$. Von nun an können wir also annehmen $g = 1$.

Da R_0 ein Hauptidealring ist, ist die kanonische Abbildung $R_0 \rightarrow R/(q)$ surjektiv; folglich ist auch die induzierte Abbildung $SL(n, R_0) \rightarrow SL(n, R/(q))$ surjektiv (siehe /2, (5.2)/). Demzufolge kann man jetzt wie im Beweis von Satz 2 verfahren.

KAPITEL II: ORTHOGONALE GRUPPEN UND DIE BEDINGUNG DER FREIEN BEWEGLICHKEIT BEI INDEFINITER METRIK

Bezeichnungen.

Wir behalten sämtliche zu Beginn von Kapitel I eingeführten Bezeichnungen bei. Der Körper K sei nun stets als unendlich angenommen. Die eindimensionalen Teilräume von K^n werden auch Punkte genannt. Ein Element g von $GL(n, K)$ heiße Involution, falls $g^2 = 1$. Es sei daran erinnert, daß für jede Involution g von $GL(n, K)$ gilt: Der Raum K^n ist die direkte Summe der Eigenräume von g zum Eigenwert 1 und -1 , falls $\text{char}(K) \neq 2$.

Ist b eine nichtdegenerierte Bilinearform auf K^n , so bezeichne $U(b)$ bzw. $GU(b)$ die Invarianzgruppe in $GL(n, K)$ der Form b bzw. der Dualität $T \mapsto T^b$; dabei sei $T^b := \{x \in K^n : b(x, y) = 0 \text{ für alle } y \text{ aus } T\}$ für jeden Teilraum T von K^n . Ferner $SU(b) := U(b) \cap SL(n, K)$.

Ist b eine nichtdegenerierte symmetrische Bilinearform und q die zugehörige quadratische Form (d.h. $q(x) = b(x, x)$ für x aus K^n), so sei $T^q := T^b$, $O(q) := U(b)$, $GO(q) := GU(b)$, $SO(q) := SU(b)$, falls $\text{char}(K) \neq 2$; es ist $GO(q)$ die Gruppe aller g aus $GL(n, K)$, so daß ein m aus K existiert mit $q(g(x)) = m q(x)$ für alle x aus K^n . Die durch die Bedingung $m = \pm 1$ definierte Untergruppe von $GO(q)$ werde mit $O^*(q)$ bezeichnet. Ein Punkt P von K^n heißt isotrop (bzgl. q), falls $P \leq P^q$; die Form q heißt isotrop, falls sie isotrope Punkte hat.

§1. HAUPTERGEBNISSE

Wir versehen $GL(n, K)$ mit der Zariski-Topologie (im naiven Sinn, siehe z.B. /21, Chapter 4/) und den Fahnenraum $\underline{F}(K^n)$ mit der Quotiententopologie, welche durch die transitive Wirkung von $GL(n, K)$ auf $\underline{F}(K^n)$ induziert wird. (Man kann zeigen, daß diese Quotiententopologie mit der Relativtopologie

übereinstimmt, welche auf $\underline{F}(K^n)$ als Menge der K-rationalen Punkte der entsprechenden algebraischen Varietät induziert wird).

SATZ 1. (Charakterisierung der isotropen orthogonalen Gruppen)

Sei K ein unendlicher Körper einer Charakteristik $\neq 2$ und G eine Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 3$, welche irreduzibel in K^n wirkt. Es existiere eine G-invariante, offene, nichtleere, echte Teilmenge $\underline{B}$ des Fahnenraums $\underline{F}(K^n)$, so daß für jede Fahne F aus $\underline{B}$ gilt: Die Standgruppe von F in G ist eine maximale Gruppe von Involutionen in $GL(n, K)$. Dann ist $G = O(q)$ oder $G = O^*(q)$ für eine nichtdegenerierte, isotrope quadratische Form q auf K^n (und $\underline{B}$ ist die Menge der Fahnen nichtdegenerierter Teilräume).

Der Beweis von Satz 1 erfolgt in §3.

BEMERKUNG 1. Umgekehrt erfüllt $G = O(q)$ die Voraussetzung von Satz 1, wenn q eine nichtdegenerierte, isotrope, quadratische Form auf K^n ist. Die Gruppe $O^*(q)$ erfüllt die Voraussetzung genau dann, wenn -1 kein Quadrat in K ist. Ferner sei bemerkt, daß jede maximale Gruppe von Involutionen in $GL(n, K)$ zu der Gruppe der Diagonalmatrizen $\text{diag}(t_1, \dots, t_n)$, $t_i = \pm 1$, konjugiert ist.

BEMERKUNG 2. Folgendermaßen konstruiert man eine Gruppe G, welche alle Voraussetzungen des Satzes bis auf die Irreduzibilität erfüllt: Seien V, W nichttriviale Teilräume von K^n mit $K^n = V \oplus W$, und sei O_V bzw. O_W die Invarianzgruppe einer anisotropen quadratischen Form auf V bzw. W; es sei G das semidirekte Produkt von $O_V \times O_W$ (in der kanonischen Weise als Untergruppe von $GL(n, K)$ aufgefaßt) mit der Gruppe $\{g \in GL(n, K): g|_V = \text{id}, g|_{K^n/V} = \text{id}\}$. Ferner $\underline{B} := \{(F_1, \dots, F_{n-1}) \in \underline{F}(K^n): F_r \cap V = 0\} \quad (r := \dim W)$.

BEMERKUNG 3. Um mit obigem Satz auch die anisotropen quadratischen Formen zu erfassen, müßte man den Fall $\underline{B} = \underline{F}(K^n)$ zulassen. In diesem Fall ergibt sich zunächst nur (siehe den Beweis von Korollar 1), daß G eine Polarität auf K^n invariant läßt und alle Involutionen aus der Invarianzgruppe dieser Polarität enthält. Um weiter schließen zu können, daß diese Polarität von einer quadratischen Form herkommt, scheint mir eine Zusatzvoraussetzung nötig zu sein. Fordert man etwa, daß G transitiv auf $\underline{F}(K^n)$ operiert, so erhält man die Gruppen mit "freier Beweglichkeit" (siehe Baer /1/). Andererseits kann man auch Zusatzvoraussetzungen an den unterliegenden Körper stellen, wie in

KOROLLAR 1. (Charakterisierung der orthogonalen Gruppen über speziellen Körpern, insbes. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$)

Sei K ein quadratisch abgeschlossener Körper oder ein unendlicher Körper ohne nichttriviale involutorische Automorphismen; ferner $\text{char}(K) \neq 2$. Sei G eine Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 3$, welche irreduzibel in K^n wirkt. Es existiere eine nichtleere, offene Teilmenge $\underline{B}$ des Fahnenraums $\underline{F}(K^n)$, so daß für jede Fahne F aus $\underline{B}$ gilt: Die Standgruppe von F in G ist eine maximale Gruppe von Involutionen in $GL(n, K)$. Dann ist $G = O(q)$ oder $G = O^*(q)$ für eine nichtdegenerierte, quadratische Form q auf K^n .

Beweis: Wir können annehmen, daß $\underline{B}$ invariant unter G ist. (Man ersetze $\underline{B}$ durch die Vereinigung der $g\underline{B}$, g aus G). Ist dann $\underline{B}$ eine echte Teilmenge von $\underline{F}(K^n)$, so folgt die Behauptung aus Satz 1. Sei also nun $\underline{B} = \underline{F}(K^n)$ angenommen. Dann läßt G eine Polarität auf K^n invariant und enthält alle Involutionen aus der Invarianzgruppe dieser Polarität (siehe Punkt (1) bis (5) des Beweises von Satz 1). Die Polarität kommt offenbar von einer (anisotropen) hermite'schen Form auf K^n her. Hat also K keine nichttrivialen, involutorischen Automorphismen, so kommt die Polarität von einer quadratischen Form q her und man erhält $G = O(q), O^*(q)$ wie in

Punkt (22) des Beweises von Satz 1.

Man wähle nun einen 2-dimensionalen Teilraum W von K^n . Dann ist die Gruppe A der g aus G_W mit $g|_{K^n/W} = \text{id}$ nichtabelsch (denn A enthält nichtkommutierende Involutionen) und kann somit nicht nur aus Involutionen bestehen. Ist aber K quadratisch abgeschlossen, so stabilisiert jedes g aus A einen eindimensionalen Teilraum von W und demnach eine Fahne von K^n . Dies zeigt, daß der Fall $\underline{B} = \underline{F}(K^n)$ nicht auftreten kann, falls K quadratisch abgeschlossen ist. q.e.d.

In dem folgenden Korollar werden die obigen Ergebnisse in geometrische Sprache umformuliert (anknüpfend an die Bemerkungen in der Einleitung). Ist K ein angeordneter Körper, so bezeichne $\underline{F}^+(K^n)$ die Menge der Fahnen orientierter Teilräume von K^n . (Ein Element von $\underline{F}^+(K^n)$ ist also ein n -Tupel $(F_1^+, \dots, F_n^+)$ orientierter Teilräume von K^n , so daß für die den F_i^+ unterliegenden Räume F_i gilt $\{0\} \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = K^n$). Wir versehen $\underline{F}^+(K^n)$ mit der größten Topologie, so daß die kanonische Abbildung von $\underline{F}^+(K^n)$ auf $\underline{F}(K^n)$ stetig wird. Eine Teilmenge von $\underline{F}^+(K^n)$ heiße "invariant unter Orientierungswechsel", falls sie das volle Urbild einer Teilmenge von $\underline{F}(K^n)$ ist.

KOROLLAR 2. Sei K ein Körper, welcher genau eine Anordnung hat. Ferner sei G eine Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 3$, welche irreduzibel in K^n wirkt. Es operiere G frei auf einer nichtleeren, offenen Teilmenge $\underline{B}^+$ von $\underline{F}^+(K^n)$, so daß die Bahnen von G in $\underline{B}^+$ invariant unter Orientierungswechsel sind. Dann ist $G = O(q)$ oder $G = O^*(q)$ für eine nichtdegenerierte quadratische Form q auf K^n .

Beweis: Nach Korollar 1 genügt es zu zeigen, daß K keine nichttrivialen, involutorischen Automorphismen hat; denn dann ist die Voraussetzung von Korollar 1 erfüllt, wenn man als $\underline{B}$ das Bild von $\underline{B}^+$ in $\underline{F}(K^n)$ wählt. Sei also f ein Automorphismus von K mit $f^2 = \text{id}$. Da K genau eine Anordnung hat, muß

f diese Anordnung erhalten. Somit sind die Bedingungen $f(x) \geq x$ und $x \geq f(x)$ äquivalent. Dies zeigt $f = \text{id}$. q.e.d.

In dem folgenden Satz ist eine Hyperebenen Spiegelung eine Involution aus $GL(n, K)$ mit $(n-1)$ -dimensionalem Fixraum. Eine Gruppe $G \leq GL(n, K)$ wirkt absolut-irreduzibel in K^n , falls G für jeden Oberkörper L von K irreduzibel in L^n wirkt. Der Körper K heißt pythagoreisch, falls die von 0 verschiedenen Quadrate in K eine additiv abgeschlossene Menge bilden.

SATZ 2. Sei K ein unendlicher Körper einer Charakteristik $\neq 2$ und G eine Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 3$, so daß jede Untergruppe von G vom Index ≤ 2 absolut-irreduzibel in K^n wirkt. Die Gruppe G habe eine offene Bahn in $\underline{F}(K^n)$, verschieden von $\underline{F}(K^n)$. Ist dann n ungerade oder enthält G eine Hyperebenen Spiegelung, so ist K quadratisch abgeschlossen und $SO(q) \leq G \leq K^* O(q)$ für eine quadratische Form q auf K^n , äquivalent der Form $x_1^2 + \dots + x_n^2$.

SATZ 3. Sei K ein unendlicher Körper und G eine fahnentransitive, abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, K)$, $n \geq 3$. Dann gilt entweder $SL(n, K) \leq G$, oder es ist K pythagoreisch und $SO(q) \leq G \leq K^* O(q)$ für eine quadratische Form q auf K^n , äquivalent der Form $x_1^2 + \dots + x_n^2$.

BEMERKUNG 4. Für ungerades n genügt es in Satz 2, die absolute Irreduzibilität von G zu fordern (anstelle aller Untergruppen vom Index ≤ 2). Daß die Voraussetzungen von Satz 2 im allgemeinen Fall alle benötigt werden, zeigen die folgenden Beispiele (irreduzible Untergruppen von $GL(n, K)$ mit einer offenen Bahn in $\underline{F}(K^n)$): $Sp(n, K)$, $GL(n/2, K_2)$, $GL(n/2, K_2) \rtimes \text{Gal}(K_2|K)$ für eine quadratische Körpererweiterung $K_2|K$, $[GL(n/2, K)]^2 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Schließlich sei bemerkt, daß $SO(q)$ die Voraussetzungen von Satz 2 bzw. 3 erfüllt, falls q, K wie angegeben.

Die Sätze 2 und 3 ergeben sich aus dem folgenden Lemma 1.
Der Beweis dieses Lemmas erfolgt in §4.

LEMMA 1. Sei L ein algebraisch abgeschlossener Körper und H eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, L)$, $n \geq 3$, so daß jede Untergruppe von H vom Index ≤ 2 irreduzibel in L^n wirkt. Ferner habe H eine offene Bahn in $\underline{F}(L^n)$. Dann gilt entweder $SL(n, L) \leq H$ oder $H \leq L^* U(b)$ für eine symmetrische oder alternierende Bilinearform $b \neq 0$ auf L^n . Ist b symmetrisch und $\text{char}(L) \neq 2$, so gilt $SO(b) \leq H \leq L^* O(b)$. Die Einskomponente von H wirkt auch noch irreduzibel in L^n .

Beweis von Satz 2 und 3: Wir bezeichnen die Situation von Satz 2 bzw. 3 mit Fall 2 bzw. 3. Es sei L ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K und $\bar{G}$ der Abschluß von G in $GL(n, L)$. Dann wirkt jede Untergruppe von $\bar{G}$ vom Index ≤ 2 irreduzibel in L^n . Im Fall 3 folgt dies daraus, daß G fahnen-transitiv in K^n wirkt und somit jede Untergruppe von G von endlichem Index eindimensionalen Zentralisator in der Endomorphismenalgebra von K^n hat. (Man verwende nun den Dichtesatz für irreduzible Moduln, siehe /14,4.3/).

Sei F eine Fahne in K^n , so daß die Bahn $\underline{B}$ von F unter G offen in $\underline{F}(K^n)$ ist. Faßt man $\underline{F}(K^n)$ in der kanonischen Weise als Teilmenge von $\underline{F}(L^n)$ auf, so liegt $\underline{B}$ dicht in $\underline{F}(L^n)$ (da $\{g \in GL(n, K) : g(F) \in \underline{B}\}$ dicht in $GL(n, L)$ ist) und somit ist die Bahn von F unter $\bar{G}$ offen in $\underline{F}(L^n)$ (denn die Bahnen von $\bar{G}$ sind offen in ihrem Abschluß, siehe /12,8.3/). Wir sehen also, daß die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt sind (für $H := \bar{G}$).

Gilt $SL(n, L) \leq \bar{G}$, so liegt die Gruppe $K^* G$ dicht in $GL(n, K)$, und damit liegt jede Bahn von G in $\underline{F}(K^n)$ dicht; dies ist im Fall 2 nicht möglich. Im Fall 3 erhalten wir $G = \bar{G} \cap GL(n, K) \geq SL(n, L) \cap GL(n, K) = SL(n, K)$. Wir können somit zufolge Lemma 1 annehmen, daß $\bar{G} \leq L^* U(b)$ für eine Bilinearform $b \neq 0$ auf L^n . Ist nun p eine K -lineare Abbildung von L nach K mit $b_0 := p(b|_{K^n \times K^n}) \neq 0$, so ist b_0 eine nicht-

triviale Bilinearform auf K^n mit $G_0 := K^*(U(b) \cap K^*G) \leq K^* U(b_0)$. Jedes g aus G ist von der Form $g = l u$ mit l aus L^* , u aus $U(b)$; dabei gilt $l^n = \det(g)\det(u)^{-1} = \pm \det(g) \in K^*$. Bezeichnet somit $p_n: GL(n, L) \rightarrow GL(n, L)$ die Abbildung $x \mapsto x^n$, so gilt $p_n(g) = l^n u^n \in K^*(U(b) \cap K^*G) = G_0$, also $p_n(G) \leq G_0$ und somit $p_n(L^*\bar{G}) \leq \bar{G}_0 \leq L^*\bar{G}$; dabei ist $\bar{G}_0$ der Abschluß von G_0 in $GL(n, L)$. Daraus folgt, daß die Einskomponente von $\bar{G}_0$ gleich der von $L^*\bar{G}$ ist; denn die Einskomponente von $L^*\bar{G}$ wirkt nach Lemma 1 irreduzibel in L^n und ist somit eine reduktive algebraische Gruppe.

Wir haben nun bewiesen, daß $\bar{G}_0$ (und damit auch G_0) irreduzibel in L^n wirkt. Demnach ist der Zentralisator von G_0 in der Endomorphismenalgebra von K^n eindimensional, und somit ist b_0 nichtdegeneriert und ist bis auf skalare Vielfache die einzige Bilinearform auf K^n mit $G_0 \leq K^* U(b_0)$. Da G die Gruppe G_0 normalisiert, muß G also die Form b_0 bis auf skalare Vielfache invariant lassen (d.h. $G \leq GU(b_0)$).

Ist b_0 eine alternierende Bilinearform, so enthält $GU(b_0)$ keine Hyperebenen Spiegelungen und wirkt nicht fahnen transitiv in K^n ; dieser Fall kann nicht auftreten, und somit ist b_0 symmetrisch (nach Lemma 1). Sei q die zugehörige quadratische Form. Wir können annehmen $q(x) = 1$ für ein x aus K^n . Ist G fahnen transitiv (Fall 3), so folgt nun gemäß Völklein /20, Satz 1/, daß K ein pythagoreischer Körper und q äquivalent der Form $x_1^2 + \dots + x_n^2$ ist; ferner $G \leq K^*O(q)$ nach /20, Lemma 2/. Schließlich hat man, daß b ein skalares Vielfaches der Fortsetzung b_1 von b_0 auf L^n ist (da $\bar{G} \leq L^*U(b) \cap L^*U(b_1)$), also $SU(b_0) = SU(b) \cap GL(n, K)$ und nach Lemma 1 somit $SO(q) = SU(b_0) = SU(b) \cap GL(n, K) \leq \bar{G} \cap GL(n, K) = G$ (im Fall 3).

Im Fall 2 verfähre man wie folgt. Wir wissen $G \leq GO(q)$ und $SO(q) \leq \bar{G} \cap GL(n, K)$. Da G eine offene Bahn in $\underline{F}(K^n)$ hat, folgt nun aus dem untenstehenden Lemma 4, daß G transitiv auf der Menge der Fahnen nichtdegenerierter Teilräume operiert; da G nicht fahnen transitiv in K^n wirkt, ergibt

dies insbesondere, daß degenerierte Teilräume existieren, d.h. q ist isotrop.

Wäre $GO(q) \neq K^* O(q)$, so würde ein t aus K existieren, welches kein Quadrat in K ist, und ein y aus K^n mit $q(y) = t$ (da ein x aus K^n existiert mit $q(x) = 1$). Dann wäre $F_2 := Kx + Ky$ ein nichtdegenerierter Teilraum, und somit würden Fahnen $F_x = (Kx, F_2, \dots, F_{n-1})$ und $F_y = (Ky, F_2, \dots, F_{n-1})$ existieren, so daß alle F_i nichtdegeneriert sind. Ist dann g aus $GO(q)$ mit $g(F_x) = F_y$, so stabilisiert g den nichtisotropen Punkt F_{n-1}^q und liegt somit in $K^* O(q)$. Dies widerspricht aber der Wahl von x, y (da $g(Kx) = Ky$).

Damit ist gezeigt, daß $GO(q) = K^* O(q)$. Folglich operiert $O(q)$ transitiv auf der Menge der nichtisotropen Punkte von q . Für jedes z aus K^n ist dann $q(z)$ ein Quadrat in K , und somit ist q äquivalent der Form $x_1^2 + \dots + x_n^2$. Daraus folgt, daß jede Summe von Quadraten in K wieder ein Quadrat in K ist. Da q isotrop ist, existieren $t_1, \dots, t_n$ aus K mit $t_1^2 + \dots + t_n^2 = 0$ und $t_1 \neq 0$; somit ist auch $-1 = (t_2^2 + \dots + t_n^2)t_1^{-2}$ ein Quadrat in K . Es folgt nun, daß K quadratisch abgeschlossen ist (unter Beachtung der Identität $t = ((t+1)^2 - t^2 - 1)/2$).

Sei PG das Bild von G in $PGL(n, K)$. Da die Gruppe PG transitiv auf der Menge der Fahnen nichtdegenerierter Teilräume operiert, hat sie endlichen Index in der Gruppe $PO(q)$ ($= PGO(q)$). Folglich enthält PG einen Normalteiler von $PO(q)$ von endlichem Index. Da die Gruppe $PSO(q)$ einfach ist (siehe /14, Th.4.15 und S.242/), falls $n \neq 4$, und isomorph $PSL(2, K) \times PSL(2, K)$, falls $n = 4$, erhält man nun $PSO(q) \leq PG$, also $SO(q) \leq K^* G$ und durch Bildung der Kommutatorgruppen schließlich $SO(q) = (SO(q))' \leq (K^* G)' \leq G$.

§2. VORBEREITUNGEN ZUM BEWEIS VON SATZ 1

Wir benötigen zunächst einige elementare Tatsachen aus der algebraischen Geometrie. In Ausweitung der in §1 eingeführten Konvention seien K^n und $GL(n, K)$ mit der Zariski-Topologie versehen (im naiven Sinn, siehe /21, Ch.4/); ferner seien $\underline{F}(K^n)$ und $\underline{G}_r(K^n)$ mit der durch die transitive Wirkung von $GL(n, K)$ induzierten Quotiententopologie versehen. Man verifiziert leicht die folgenden Aussagen: ($1 \leq r < n$)

- (A 1) Die eben betrachteten topologischen Räume sind irreduzibel (d.h. der Durchschnitt von endlich vielen nichtleeren offenen Teilmengen ist nichtleer).
- (A 2) Die Relativtopologie auf $K^n \setminus \{0\}$ (als Teilmenge von K^n) stimmt mit der durch die transitive Wirkung von $GL(n, K)$ induzierten Quotiententopologie überein.
- (A 3) Die kanonische Abbildung von $K^n \setminus \{0\}$ auf $\underline{G}_1(K^n)$ ist stetig und offen; desgleichen die Projektionen von $\underline{F}(K^n)$ auf $\underline{G}_r(K^n)$.
- (A 4) Ist L ein Oberkörper von K und ist $\underline{G}_1(K^n)$ in der kanonischen Weise als Teilmenge von $\underline{G}_1(L^n)$ aufgefaßt, so ist die Topologie von $\underline{G}_1(K^n)$ gleich der von $\underline{G}_1(L^n)$ induzierten Relativtopologie; analog für $\underline{F}(K^n)$.
- (A 5) Eine abgeschlossene, echte Teilmenge des projektiven Raums $\underline{G}_1(K^n)$ enthält nur endlich viele $\underline{G}_1(H)$, H aus $\underline{G}_{n-1}(K^n)$.
- (A 6) Ist W ein Teilraum von K^n und $1 \leq r < \dim(W)$, so ist die Relativtopologie auf W bzw. $\underline{G}_r(W)$ (als Teilmenge von K^n bzw. $\underline{G}_r(K^n)$) gleich der durch einen Isomorphismus $K^m \rightarrow W$ induzierten Topologie.
- (A 7) Ist H eine Hyperebene von K^n und $2 \leq r \leq n-1$, so ist $\underline{M} := \{T \in \underline{G}_r(K^n) : T \not\subset H\}$ eine offene Teilmenge von $\underline{G}_r(K^n)$, und die Abbildung $T \rightarrow T \cap H$ von $\underline{M}$ in $\underline{G}_{r-1}(K^n)$ ist stetig.
- (A 8) Für jede nichtdegenerierte quadratische Form q auf K^n ist die Abbildung $T \rightarrow T^q$ ein Homöomorphismus von $\underline{G}_r(K^n)$ auf $\underline{G}_{n-r}(K^n)$. Diese Abbildungen ergeben zusammen

einen Homöomorphismus von $\underline{F}(K^n)$ auf sich. ($\text{char}(K) \neq 2$).
(A 9) Ist H eine Hyperebene von K^n und $n \geq 3$, so induziert jeder Isomorphismus $K^{n-1} \rightarrow H$ (in kanonischer Weise) einen Homöomorphismus von $\underline{F}(K^{n-1})$ auf die Menge der Fahnen $(F_1, \dots, F_{n-2}, H)$ aus $\underline{F}(K^n)$ (versehen mit der Relativtopologie).

Für den Rest von §2 sei nun vorausgesetzt $\text{char}(K) \neq 2$.

LEMMA 2. Sei G eine Untergruppe von $GL(3, K)$, welche irreduzibel in K^3 wirkt. Der Abschluß von G in $GL(3, K)$ enthalte nicht die Gruppe $SL(3, K)$. Die Standgruppe G_x sei unendlich für ein $x \neq 0$ aus K^3 . Schließlich habe G keine diagonalisierbare Untergruppe von endlichem Index. Dann ist $G \leq GO(q)$ für eine nicht-degenerierte quadratische Form q auf K^3 .

Beweis: Sei L ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K , sei $\bar{G}$ der Abschluß von G in $GL(3, L)$ und E die Einskomponente von $\bar{G}$. Dann ist $G_0 := E \cap G$ ein Normalteiler von G von endlichem Index. Nach Voraussetzung ist die Gruppe G_0 nicht diagonalisierbar, und wirkt somit irreduzibel in K^3 (als Normalteiler der irreduziblen Gruppe G). Der Zentralisator C von G_0 in der Algebra der 3×3 -Matrizen über K ist dann eine Divisionsalgebra über K (nach Schur's Lemma); also $\dim_K(C) = 1$ oder $\dim_K(C) = 3$. Im Fall $\dim_K(C) = 3$ wäre die Standgruppe in G_0 eines jeden $x \neq 0$ aus K^3 trivial; dies widerspricht der Voraussetzung. Es gilt also $\dim_K(C) = 1$, und somit wirkt G_0 auch in L^3 irreduzibel (nach dem Dichtheitsatz für irreduzible Moduln). Folglich wirkt E irreduzibel in L^3 und ist somit Produkt einer halbeinfachen (zusammenhängenden) algebraischen Gruppe E' mit einer Untergruppe des Zentrums von $GL(3, L)$. Nach Voraussetzung enthält E nicht die Gruppe $SL(3, L)$, und somit ist E' eine echte Untergruppe von $SL(3, L)$. Aus Dimensionsgründen ist also E' vom Typ A_1 oder $A_1 \times A_1$ (zufolge der Klassifikation der halbeinfachen algebraischen Gruppen, siehe z.B. /12/). Der Fall $A_1 \times A_1$ kann nicht vorliegen, da jede irreduzible Darstellung (in L^m) einer

Gruppe des Typs $A_1 \times A_1$ Tensorprodukt von Darstellungen von Gruppen des Typs A_1 ist. Also ist E' vom Typ A_1 und läßt somit eine nichtdegenerierte quadratische Form q_L auf L^3 invariant (nach Humphreys /12, 31.6/ hat nämlich jede irreduzible, rationale Darstellung einer Gruppe des Typs A_1 eine invariante Bilinearform $\neq 0$, und wegen $3 \equiv 1 \pmod{2}$ kann E' keine alternierende Bilinearform $\neq 0$ auf L^3 invariant lassen).

Aus Dimensionsgründen ist dann $E' = SO(q_L)$ und daher $\bar{G} \leq GO(q_L)$ (denn $\bar{G}$ normalisiert E'). Nun kann man wie im Beweis von Satz 2 und 3 verfahren.

LEMMA 3. Sei q eine nichtdegenerierte quadratische Form auf K^n , $n \geq 3$, und $\underline{P}$ eine offene Teilmenge von $\underline{G}_1(K^n)$, welche keine isotropen Punkte enthält. Dann wird die Gruppe $O(q)$ von den Spiegelungen an denjenigen Hyperebenen erzeugt, welche senkrecht zu Punkten aus $\underline{P}$ sind.

Beweis: Sei x aus K^n mit $q(x) \neq 0$, und sei A bzw. $\underline{A}$ die Bahn von x bzw. von Kx unter $O(q)$. Dann gilt:

- (1) A ist irreduzibel (als Teilmenge von K^n), und
- (2) $\underline{A}$ liegt dicht in $\underline{G}_1(K^n)$.

Bezeichnet nämlich q_L die Fortsetzung von q auf L^n , L ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K , so liegt $SO(q)$ dicht in $SO(q_L)$ gemäß Borel /5, (18.3)/; mit $SO(q_L)$ ist also auch $SO(q)$ und damit $A = SO(q) \cdot x$ irreduzibel (als topologischer Raum). Dies zeigt (1). Punkt (2) folgt (unter Beachtung von (A 4)) daraus, daß die Bahn von Lx unter $SO(q_L)$ gleich der Menge der nichtisotropen Punkte von q_L ist.

Seien nun x_1, x_2 aus A mit $x_1 \neq x_2$. Für $i=1,2$ ist dann die Abbildung $f_i: z \mapsto K(z-x_i)$ von $A \setminus \{x_i\}$ in $\underline{G}_1(K^n)$ stetig mit dichtem Bild (denn jeder nichtisotrope Punkt, welcher nicht orthogonal zu x_i ist, liegt im Bild von f_i). Nach (1) ist folglich die Menge $f_1^{-1}(\underline{P}) \cap f_2^{-1}(\underline{P})$ nichtleer; sei z aus dieser Menge. Dann liegt $P_i := K(z-x_i)$ in $\underline{P}$, und die Spiege-

lung S_i an der zu P_i orthogonalen Hyperebene bildet z auf x_i ab (für $i=1,2$). Also hat man $S_2 S_1(x_1) = x_2$. Dies zeigt, daß die Gruppe F , welche von den Spiegelungen an den zu Punkten von $\underline{P}$ senkrechten Hyperebenen erzeugt wird, transitiv auf A operiert.

Wir wissen nun, daß je zwei Hyperebenen spiegeln aus $O(q)$ genau dann unter $O(q)$ konjugiert sind, wenn sie unter F konjugiert sind. Nach (2) enthält aber jede Konjugationsklasse solcher Spiegelungen ein Element von F . Also enthält F alle diese Spiegelungen. Diese erzeugen aber die Gruppe $O(q)$, also $F = O(q)$.

LEMMA 4. Sei q eine nichtdegenerierte quadratische Form auf K^n , $n \geq 3$, und F eine Fahne in K^n , welche aus nichtdegenerierten Teilräumen besteht. Dann liegt die Bahn von F unter $O(q)$ dicht in $\underline{F}(K^n)$.

Beweis: Analog dem Beweis von Punkt (2) im Beweis von Lemma 3.

LEMMA 5. Sei q eine nichtdegenerierte quadratische Form auf K^n , $n \geq 4$. Ist K algebraisch abgeschlossen, so wirkt die Gruppe $O(q)$ primitiv auf der Menge der nichtisotropen Punkte von q .

Beweis: Sei $\underline{A}$ eine Menge von nichtisotropen Punkten, welche mindestens zwei verschiedene Punkte Kx, Ky enthält (x, y aus K^n , $q(x)=q(y)=1$). Für jedes f aus $O(q)$ gelte $f(\underline{A}) = \underline{A}$ oder $f(\underline{A}) \cap \underline{A} = \emptyset$. Wir müssen zeigen, daß $\underline{A}$ dann die Menge aller nichtisotropen Punkte von q ist.

Sei b die zu q gehörige (symmetrische) Bilinearform (also $q(z) = b(z, z)$ für alle z aus K^n) sowie $r := b(x, y)$. Für jedes s aus K^* ist dann $B_s := \{z \in K^n : b(x, z) = r, b(y, z) = s\}$ ein affiner Teilraum von K^n der Dimension $n-2$. Man schreibe $B_s = u + W$ für ein W aus $\underline{G}_{n-2}(K^n)$ und ein u aus $K^n \setminus W$. Existiert ein w aus W mit $b(u, w) \neq 0$, so hat die Gleichung

$q(u + tw) = 1$ eine Lösung t in K . Ist andererseits $b(u, W) = 0$, so kann W nicht total-isotrop sein (da $\dim(W^Q) = n - \dim(W) = 2 \leq n-2 = \dim(W)$ und $u \in W^Q \setminus W$); also existiert ein w aus W mit $q(w) \neq 0$. Dann hat die Gleichung $q(u + tw) = 1$ wiederum eine Lösung t in K . Damit ist gezeigt, daß die Menge $C_s := \{z \in B_s : q(z) = 1\}$ nichtleer ist (für jedes s aus K^*).

Wir zeigen nun, daß die Menge $\underline{A}$ jeden nichtisotropen Punkt P von q enthält, welcher nicht orthogonal zu Ky ist. Jedes solche P ist nämlich von der Form Kv , v aus K^n mit $q(v) = 1$ und $s := b(y, v) \neq 0$. Für jedes z aus C_s existiert dann ein f_1 aus $O(q)$ mit $f_1(y) = y$ und $f_1(z) = v$; ferner existiert ein f_2 aus $O(q)$ mit $f_2(x) = x$ und $f_2(y) = z$. Somit gilt $f_1(\underline{A}) = \underline{A} = f_2(\underline{A})$ und damit $P = Kv = f_1 f_2(Ky) \in f_1 f_2(\underline{A}) = \underline{A}$.

Die Menge $\underline{A}$ enthält also eine offene Teilmenge von $\underline{G}_1(K^n)$. Nach (A 1) kann somit der Fall $f(\underline{A}) \cap \underline{A} = \emptyset$ für kein f aus $O(q)$ auftreten. Folglich ist $\underline{A}$ invariant unter $O(q)$, und ist damit gleich der Menge aller nichtisotropen Punkte von q .

LEMMA 6. Sei K algebraisch abgeschlossen und q eine nicht-degenerierte quadratische Form auf K^n , $n \geq 3$. Dann liegt jedes Element f von $GL(n, K)$, welches die Menge der isotropen Punkte von q invariant läßt, in der Gruppe $GO(q)$.

Beweis: Für jeden isotropen Punkt $P = Kx$ ist P^Q der Tangentialraum an $\{y \in K^n : q(y) = 0\}$ im Punkt x ; daraus folgt $f(P^Q) = f(P)^Q$. Die Kollineation $T \mapsto f^{-1}(f(T^Q)^Q)$ fixiert also alle isotropen Punkte von q und ist somit die Identität (da sie von einer linearen Abbildung $K^n \rightarrow K^n$ herkommt). Folglich liegt f in $GO(q)$.

§3. DER BEWEIS VON SATZ 1

Seien nun $n, K, G, \underline{B}$ wie in Satz 1. Das Bild $\underline{B}_r$ von $\underline{B}$ unter der Projektion $\underline{F}(K^n) \rightarrow \underline{G}_r(K^n)$ ist eine G -invariante, nicht-leere, offene Teilmenge von $\underline{G}_r(K^n)$ (für $r=1, \dots, n-1$). Wir setzen $\underline{P} := \underline{B}_1$, $\underline{H} := \underline{B}_{n-1}$, $\underline{T} := \bigcup_{r=1}^{n-1} \underline{B}_r$.

(1) Zu jedem T aus $\underline{T}$ existiert genau eine Involution g_T aus G mit Fixraum T :

Die Existenz von g_T folgt nämlich aus der Voraussetzung über die Standgruppen von G in $\underline{B}$. Ist g'_T eine weitere solche Involution, so stabilisiert das unipotente Element $g_T g'_T$ jede Fahne durch T und ist somit die Identität (wiederum nach der Voraussetzung über die Standgruppen von G in $\underline{B}$).

(2) Ist $G = O(q)$ oder $G = O^*(q)$ für eine nichtdegenerierte quadratische Form q auf K^n , so ist $\underline{B}$ die Menge der Fahnen nichtdegenerierter Teilräume:

Sei F eine Fahne in K^n . Besteht F aus nichtdegenerierten Teilräumen, so liegt F nach Lemma 4 in $\underline{B}$. Enthält F einen degenerierten Teilraum D , so liegt F nicht in $\underline{B}$, da D nach (1) nicht in $\underline{T}$ liegen kann.

(3) Zu jedem T aus $\underline{T}$ existiert genau ein G_T -invarianter Teilraum T^O von K^n mit $K^n = T \oplus T^O$:

Man setze nämlich $T^O := \ker(g_T + \text{id})$ (siehe (1)).

(4) Sind S, T aus $\underline{T}$ mit $S \leq T$, so gilt $T^O \leq S^O$:

Wegen $g_T(S) = S$ gilt nämlich $g_T(S^O) = S^O$ und somit $T^O = \ker(g_T + \text{id}) \leq S^O$.

(5) Für g aus G und T aus $\underline{T}$ gilt $g(T^O) = g(T)^O$; liegt auch T^O in $\underline{T}$, so hat man $(T^O)^O = T$:

klar nach Definition.

(6) Sei p eine nichtdegenerierte quadratische Form auf K^n , G^* die Gruppe der (bzgl. p) Adjungierten der Elemente von

G und $\underline{B}^*$ die Menge der $(F_{n-1}^D, \dots, F_1^D)$, wo $(F_1, \dots, F_{n-1}) \in \underline{B}$. Dann erfüllt das Paar $G^*, \underline{B}^*$ ebenfalls die Voraussetzung des Satzes: Dies folgt mit (A 8).

(7) Es enthält G keine diagonalisierbare Untergruppe von endlichem Index:

Für jede solche Untergruppe U könnte man nämlich ein P aus $\underline{P}$ finden, so daß U_P nur aus Skalaren besteht. Dann würde G_P endliches Bild in $\text{PGL}(n, K)$ haben. Dies widerspricht aber der Tatsache, daß G_P die unendlich vielen Involutionen g_H enthält, wo $H \in \underline{H}$ und $P \leq H$. (Daß die Menge dieser H unendlich ist, folgt z.B. aus (A 8) und (A 6)).

(8) Jeder Punkt P aus $\underline{G}_1(K^n)$ ist in mindestens einem H aus $\underline{H}$ enthalten:

Wäre nämlich der Punkt P in keinem H aus $\underline{H}$ enthalten, so würde dies auch für alle $g(P)$, $g \in G$, gelten; also müßte die Menge M der $g(P)$, $g \in G$, endlich sein (nach (A 8) und (A 5)). Wegen der Irreduzibilität von G spannt die Menge M aber ganz K^n auf, und somit wäre der Kern der Wirkung von G auf M eine diagonalisierbare Untergruppe von G von endlichem Index, im Widerspruch zu (7).

1. Fall: $n=3$

Wir verifizieren, daß die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt sind: Mit G läßt auch der Abschluß von G in $\text{GL}(3, K)$ die abgeschlossene Teilmenge $\underline{F}(K^3) \setminus \underline{B}$ von $\underline{F}(K^3)$ invariant; somit enthält dieser Abschluß nicht die Gruppe $\text{SL}(3, K)$. Ist x aus K^3 mit $Kx \in \underline{P}$, so enthält G_x die unendlich vielen Involutionen g_H , wo $H \in \underline{H}$ und $Kx \leq H$ (siehe den Beweis von (7)). In Anbetracht von (7) sind also die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt, und wir erhalten eine nichtdegenerierte quadratische Form q auf K^3 mit $G \leq \text{GO}(q)$.

Nach Lemma 3 erzeugen die Spiegelungen $-g_P$ (P aus $\underline{P}$) die Gruppe $\text{O}(q)$, also $\text{O}(q) \leq G$. Wegen $G \leq \text{GO}(q)$ existiert zu jedem g aus G ein m aus K^* mit $q(g(x)) = m q(x)$ für alle

x aus K^3 . Dann gilt $m^{-1}g^2 \in O(q) \leq G$ und somit $m^{-1} \cdot \text{id} \in G$. Da die skalare Transformation $m^{-1} \cdot \text{id}$ jede Fahne in K^3 stabilisiert, folgt nun $m = \pm 1$. Die Gruppe G ist also in $O^*(q)$ enthalten, und somit gilt $G = O(q)$ oder $G = O^*(q)$. Unter Beachtung von (2) ist der Satz damit im Fall $n=3$ bewiesen.

2. Fall: $n \geq 4$

(9) Für jedes H aus $\underline{H}$ wirkt die Gruppe G_H irreduzibel in H : Sei nämlich angenommen, daß ein G_H -invarianter Teilraum W von H existiert mit $\{0\} \neq W \neq H$. Mit $r := n - \dim(W)$ gilt dann: (*) Für alle Z aus $\underline{G}_{r-1}(H) \cap \underline{T}$ mit $H = W \oplus Z$ ist $X := W + H^0 = Z^0$ (denn man hat $g_Z(H) = H$ und somit $g_Z(W) = W$ sowie $g_Z(H^0) = H^0$).

Da H in $\underline{H}$ liegt, enthält $\underline{G}_{r-1}(H)$ ein Element von $\underline{T}$, und somit ist die Menge aller T aus $\underline{G}_r(K^n)$ mit $T \cap H \in \underline{B}_{r-1}$ eine nichtleere, offene Teilmenge von $\underline{G}_r(K^n)$ (nach (A 7)). Folglich ist die Menge $\underline{M}$ aller T aus $\underline{B}_r$ mit $T \cap H \in \underline{B}_{r-1}$ und $K^n = T \oplus W$ ebenfalls eine nichtleere, offene Teilmenge von $\underline{G}_r(K^n)$ (nach (A 1)). Zufolge (4) und (*) gilt $T^0 \leq (T \cap H)^0 = X$ für alle T aus $\underline{M}$.

Für alle g aus G und S aus $g(\underline{M})$ gilt somit $g^{-1}(S^0) = (g^{-1}(S))^0 \leq X$, also $S^0 \leq g(X)$. Da der Durchschnitt von endlich vielen $g(\underline{M})$ (g aus G) nichtleer ist (nach (A 1)), ist folglich der Durchschnitt über je endlich viele der Räume $g(X)$ (g aus G) nichttrivial, im Widerspruch zur Irreduzibilität von G . Dieser Widerspruch beendet den Beweis von (9).

(10) Für jedes H aus $\underline{H}$ ist die Menge $\underline{B}_H$ der Fahnen $(F_1, \dots, F_{n-2})$ aus $\underline{F}(H)$ mit $(F_1, \dots, F_{n-2}, H) \in \underline{B}$ eine nichtleere, offene Teilmenge von $\underline{F}(H)$: (Dabei trage $\underline{F}(H)$ die durch einen Isomorphismus $K^{n-1} \rightarrow H$ induzierte Topologie). Dies folgt aus (A 9).

Ist $\underline{B}_H = \underline{F}(H)$ für alle H aus $\underline{H}$, so hat man $\underline{P} = \underline{G}_1(K^n)$ (nach (8)) und $\underline{H} \neq \underline{G}_{n-1}(K^n)$ (da $\underline{B} \neq \underline{F}(K^n)$); durch Duali-

sieren (siehe (6)) kann man dann auf den Fall reduzieren, daß ein H aus $\underline{H}$ existiert mit $\underline{B}_H \neq \underline{F}(H)$. Wir können also annehmen, daß dieser Fall vorliegt. Sei ein H aus $\underline{H}$ mit $\underline{B}_H \neq \underline{F}(H)$ fest gewählt. Zufolge (9) und (10) können wir dann per Induktion ferner annehmen, daß eine nichtdegenerierte, isotrope, quadratische Form q_H auf H existiert mit:

- (11) Die von G_H in H induzierte Gruppe G^H ist in $GO(q_H)$ enthalten, und
- (12) Es ist $\underline{B}_H$ die Menge der Fahnen aus $\underline{F}(H)$, welche aus (bzgl. q_H) nichtdegenerierten Teilräumen bestehen.

(13) Für jedes N aus $\underline{H}$ liegt der Punkt N^O in $\underline{P}$:

Nach (8) ist N^O nämlich in einem E aus $\underline{H}$ enthalten. Ist $\underline{B}_E = \underline{F}(E)$, so liegt N^O in $\underline{P}$. Ist $\underline{B}_E \neq \underline{F}(E)$, so erhält man wie eben eine nichtdegenerierte, quadratische Form q_E auf E mit $G^E \leq GO(q_E)$, so daß $\underline{B}_E$ alle Fahnen (bzgl. q_E) nichtdegenerierter Teilräume von E enthält. Da N^O Eigenraum der Involution g_N aus G_E ist, ist N^O ein nichtisotroper Punkt von q_E und somit existiert eine Fahne aus $\underline{B}_E$ durch N^O .

(14) Für jedes P aus $\underline{P}$ liegt P^O in $\underline{H}$:

Dies ist dual zu (13) (siehe (6)).

(15) Es existieren P aus $\underline{P}$ und L aus $\underline{B}_2$ mit $L = P + H^O$ und $\{P, P^O \cap L\} \cap \{H^O, H \cap L\} = \emptyset$: (Wir halten dieses P und L nun für den Rest des Beweises fest)

Nach (13) existiert nämlich ein L aus $\underline{B}_2$ mit $H^O \leq L$. Die Gerade L enthält unendlich viele Punkte P aus $\underline{P}$ (nach (A 6) und (A 5)). Für jeden solchen Punkt P gilt

$P = (P^O)^O = ((P^O \cap L) + L^O)^O$ nach (14), (5) und (4); folglich gibt es höchstens 4 Punkte P aus $\underline{P}$ auf der Geraden L , welche die Bedingung $\{P, P^O \cap L\} \cap \{H^O, H \cap L\} = \emptyset$ nicht erfüllen.

(16) Der Punkt $H \cap L$ ist nichtisotrop bzgl. q_H :

Die Involution g_L läßt nämlich H^O und damit auch H invariant (da $H = (H^O)^O$ nach (13) und (5)); folglich ist der Punkt $H \cap L$ Fixraum der Involution $g_L|_H$ aus $GO(q_H)$.

(17) Es gilt $g_P(H^0) \neq H^0$:

Wäre nämlich $g_P(H^0) = H^0$, so hätte man entweder $H^0 \leq \text{kern}(g_P - \text{id}) = P$ oder $H^0 \leq \text{kern}(g_P + \text{id}) \cap L = P^0 \cap L$; beides ist nach Wahl von P (in (15)) nicht möglich.

(18) Es existiert eine nichtdegenerierte, quadratische Form

q auf K^n mit $q|_H = q_H$, $H^q = H^0$ und $g_P \in O(q)$:

Sei $x \neq 0$ aus H^0 . Durch $q|_H = q_H$, $H^q = H^0$ und $q(x) = t$ wird für jedes t aus K^* genau eine nichtdegenerierte, quadratische Form q auf K^n definiert. Es gilt $L^q = \text{kern}(g_L + \text{id}) = L^0$, denn es liegt g_L in G_H (siehe den Beweis von (16)) und somit in $O(q)$. Folglich genügt es, t so zu wählen, daß $P^0 \cap L \leq P^q$; denn dann gilt $P^0 = (P^0 \cap L) + L^0 \leq (P^q \cap L) + L^q \leq P^q$ (siehe (4)), also $P^0 = P^q$ und somit $g_P \in O(q)$.

Seien nun y, u, w aus K^n mit $H \cap L = Ky$, $P = Ku$, $P^0 \cap L = Kw$. Dann existieren a, b, c, d aus K mit $u = ax + by$ und $w = cx + dy$. Die Beziehung $P^0 \cap L \leq P^q$ ist äquivalent zu $act + bd \cdot q_H(y) = 0$. Diese Gleichung hat aber eine Lösung t in K^* , denn die Skalare $a, b, c, d, q_H(y)$ sind gemäß (15) und (16) von 0 verschieden.

(19) Für jedes $x \neq 0$ aus H^0 gilt $O(q)_x \leq G$:

Nach (12) und (11) sind nämlich die Involutionen von $O(q_H)$ genau die $(-g_T)|_H$, T aus $\underline{T}$ mit $T \leq H$. Da die Gruppe $O(q_H)$ von diesen Involutionen erzeugt wird, erzeugen die $-g_T$ (T aus $\underline{T}$, $T \leq H$) die Standgruppe $O(q)_x$.

(20) Sei $\bar{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von K , sei $\bar{G}$ der Abschluß von G in $GL(n, \bar{K})$ und $\bar{q}$ die Fortsetzung von q auf $\bar{K}^n$. Dann enthält $\bar{G}$ die Gruppe $O(\bar{q})$:

Sei $x \neq 0$ aus H^0 . Wegen $SO(q)_x \cong SO(q_H)$ folgt nach Borel /5, (18.3)/ , daß der Abschluß von $SO(q)_x$ in $GL(n, \bar{K})$ gleich $SO(\bar{q})_x$ ist. Also $SO(\bar{q})_x \leq \bar{G}$ (da $SO(q)_x \leq G$ nach (19)). Dann enthält $\bar{G}$ auch die Standgruppe S von $\bar{K}x$ in $O(\bar{q})$ (da S von $SO(\bar{q})_x$, g_H und $-g_H$ erzeugt wird). Nach Lemma 5 ist S eine maximale Untergruppe von $O(\bar{q})$. Wegen

$g_p \in O(\bar{q}) \setminus S$ (siehe (18) und (17)) wird die Gruppe $O(\bar{q})$ somit von S und g_p erzeugt.

(21) Es gilt $\bar{G} \leq GO(\bar{q})$:

Nach Lemma 6 genügt es zu zeigen, daß $\bar{G}$ die Menge der isotropen Punkte von $\bar{q}$ invariant läßt. Wäre dies nicht der Fall, so würde $\bar{G}$ transitiv auf $\underline{G}_1(\bar{K}^n)$ operieren (nach (20)). Dann wäre jede Bahn von G in $\underline{G}_1(\bar{K}^n)$ dicht; folglich hätte man $\underline{G}_1(K^n) \setminus \underline{P} = \emptyset$ (siehe (A 4)) und somit $\underline{P} = \underline{G}_1(K^n)$. Dann wäre jeder Punkt Q auf H nichtisotrop bzgl. q_H (als Fixraum der Involution $g_Q|_H$ aus $O(q_H)$), im Widerspruch dazu, daß die quadratische Form q_H isotrop ist.

(22) Es ist $G = O(q)$ oder $G = O^*(q)$:

Nach (21) ist G nämlich in $GO(q)$ enthalten. Nach Lemma 3 ist dann $O(q)$ in G enthalten. Man schließe nun wie im Fall $n=3$.

Unter Beachtung von (2) ist der Beweis von Satz 1 damit beendet.

§4. DER BEWEIS VON LEMMA 1

Es liege die Situation von Lemma 1 vor. Wir zeigen zunächst, daß die Einskomponente H_0 von H auch noch irreduzibel in L^n wirkt. Dazu beachte man, daß L^n die direkte Summe gewisser H_0 -irreduzibler Teilräume $W_1, \dots, W_r$ der Dimension $m = n/r$ ist (Satz von Clifford). Dann gilt $rm^2 = \dim GL(m, L)^r \geq \dim H_0 = \dim H \geq \dim \underline{F}(L^n) = n(n-1)/2 = mr(mr-1)/2$, also $m(r-2) \leq 1$ und somit $r \leq 3$. Im Fall $r=3$ wäre $m=1$, $n = mr = 3$ und H_0 eine maximale Torusuntergruppe von $GL(3, L)$, im Widerspruch dazu, daß H eine offene Bahn in $\underline{F}(L^n)$ hat. Da H die H_0 -irreduziblen Teilräume von L^n permutiert und $[H: H_{W_1}] > 2$ nach Voraussetzung, erhält man im Fall $r=2$, daß L^n die direkte Summe zweier isomorpher, irreduzibler H_0 -Moduln ist. Dies ergibt aber $(n/2)^2 = \dim GL(n/2, L) \geq \dim H_0 = \dim H \geq n(n-1)/2$, ein Widerspruch (da $n \geq 3$).

Also wirkt H_0 irreduzibel in L^n und ist demnach eine reduktive algebraische Gruppe. Dann ist die Kommutatorgruppe H_1

von H_0 halbeinfach und wirkt auch irreduzibel in L^n . Ferner gilt $\dim(H_1) \geq \dim \underline{F}(L^n)$ (denn $H_1/(H_1 \cap L^*)$ ist die Einskomponente von $H/(H \cap L^*)$, und letztere Gruppe wirkt mit einer offenen Bahn in $\underline{F}(L^n)$).

Es genügt zu zeigen, daß entweder $H_1 = SL(n, L)$ oder $H_1 \leq U(b)$ für eine Bilinearform $b \neq 0$ auf L^n . Denn dann ist b bis auf skalare Vielfache die einzige solche Bilinearform, und somit ist b bis auf skalare Vielfache invariant unter H (d.h. $H \leq L^* U(b)$) und ist symmetrisch oder alternierend. Ist ferner b symmetrisch und $\text{char}(L) \neq 2$, so gilt zunächst $H_1 \leq SO(b)$ und damit sogar $H_1 = SO(b)$, da $\dim(H_1) \geq \dim \underline{F}(L^n) = \dim SO(b)$.

Wir behandeln nun den Fall, daß H_1 nicht einfach ist; sei also $H_1 = H_2 H_3$, wo H_2, H_3 halbeinfach sind und sich zentralisieren. Dann ist L^n als H_1 -Modul isomorph $V_2 \otimes V_3$, wo V_i ein irreduzibler H_i -Modul ist ($i=2,3$). Mit $n_i := \dim(V_i)$ erhalten wir somit

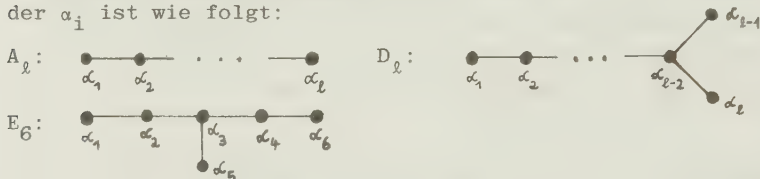
$$n_2^2 - 1 + n_3^2 - 1 \geq \dim(H_2) + \dim(H_3) = \dim(H_1) \geq \dim \underline{F}(L^n) = n(n-1)/2 = n_2 n_3 (n_2 n_3 - 1)/2, \text{ also}$$

$n_2^2 n_3^2 - 2n_2^2 - 2n_3^2 - n_2 n_3 + 4 \leq 0$. Wegen $n_i \geq 2$ kann dies nur gelten, falls $n_2 = n_3 = 2$ und $H_i \cong SL(V_i)$; in diesem Fall läßt aber H_1 eine Bilinearform $\neq 0$ invariant (da H_i eine Bilinearform $\neq 0$ auf V_i invariant läßt, $i=2,3$).

Wir können also nun annehmen, daß H_1 (fast-) einfach ist. Ist dann H_1 vom Typ $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell$ (ℓ gerade), E_7, E_8, F_4, G_2 , so läßt H_1 gemäß Humphreys /12, 31.6/ eine Bilinearform $\neq 0$ invariant. Das folgende Lemma 7 beendet somit den Beweis von Lemma 1.

LEMMA 7. Sei L algebraisch abgeschlossen und G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n, L)$, $n \geq 3$, welche irreduzibel in L^n wirkt und eine einfache algebraische Gruppe vom Typ A_ℓ ($\ell > 1$), D_ℓ (ℓ ungerade) oder E_6 ist. Dann gilt $G = SL(n, L)$ oder $\dim(G) < n(n-1)/2$ oder $G \leq U(b)$ für eine Bilinearform $b \neq 0$ auf L^n .

Beweis: Wir verwenden die Darstellungstheorie halbeinfacher algebraischer Gruppen. (Dabei benutzen wir die Terminologie von /12/ und /13, Ch. III/). Sei T ein maximaler Torus von G , $X(T)$ die Charaktergruppe von T und $\Phi \subset X(T)$ die Menge der Wurzelformen von G bzgl. T . Dann ist Φ ein (abstraktes) Wurzelsystem in dem reellen Vektorraum $E := X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Wir wählen eine natürliche Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ von Φ und bezeichnen die zugehörigen Fundamentalgewichte mit $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$. Die Numerierung der α_i ist wie folgt:



Sei λ das höchste Gewicht der Darstellung von G in L^n (bzgl. der durch die Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ definierten Ordnung auf E). Wir benutzen die Tatsache, daß für die Kardinalität N der Bahn von λ unter der Weylgruppe W von Φ gilt: $N \leq n$.

1. Fall: G ist vom Typ A_ℓ ($\ell > 1$).

In diesem Fall hat λ_1 genau $(\ell+1)$ konjugierte $\omega_i := \lambda_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j$ unter der Weylgruppe W ($i = 1, \dots, \ell+1$); diese spannen den Raum E auf und erfüllen die Beziehung $\omega_1 + \dots + \omega_{\ell+1} = 0$. Ferner induziert W die volle Permutationsgruppe $S_{\ell+1}$ auf der Menge $\{\omega_1, \dots, \omega_{\ell+1}\}$ (siehe Humphreys /13, 12.1/). Schreibt man nun λ als Linearkombination

$\lambda = \sum c_i \omega_i$ und setzt $k_c := |\{i: c_i = c\}|$ für $c \in \mathbb{R}$, so gilt für die Standgruppe U von λ in W offenbar: $U \cong \prod_{c \in \mathbb{R}} S_{k_c}$.

Die Bahn von λ unter W hat also die Kardinalität $N = (\ell+1)! / \prod k_c!$.

(1) Gilt $k_c \geq 1$ für mindestens 3 verschiedene c , so ist $n \geq N = (\ell+1)\ell(\ell-1)! / \prod k_c! \geq (\ell+1)\ell > 2\ell$; die Beziehung $n > 2\ell$ impliziert aber $\dim(G) = \ell(\ell+2) < n(n-1)/2$.

(2) Gilt $k_c + k_d = \ell+1$ und $k_c \geq 2, k_d \geq 2$ für Zahlen $c \neq d$, so ist $n \geq N = \binom{\ell+1}{k_c} \binom{\ell+1}{k_d} > 2\ell$, falls $\ell > 3$; dann folgt $\dim(G) < n(n-1)/2$ wie in (1). Sei also nun $\ell=3$.

Dann ist λ ein Vielfaches von $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 + \omega_3$ oder $\omega_1 + \omega_4$ (da $k_c = k_d = 2$). Nun enthält aber weder der Raum $\mathbb{R}(\omega_1 + \omega_3)$ noch der Raum $\mathbb{R}(\omega_1 + \omega_4)$ ein dominantes Element $\neq 0$ (da $\omega_1 + \omega_3 = \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2$ und $\omega_1 + \omega_4 = \lambda_1 - \lambda_3$), und somit ist λ ein Vielfaches von $\omega_1 + \omega_2 = \lambda_2$. Daraus folgt nun mit dem in /12,31.6/ angegebenen Kriterium, daß die irreduzible Darstellung von G mit höchstem Gewicht λ eine invariante Bilinearform $\neq 0$ hat; denn λ_2 ist unter jedem Automorphismus von Φ invariant, welcher die Basis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in sich abbildet. (Bemerkung: Die irreduzible Darstellung von G mit höchstem Gewicht λ_2 ist die natürliche Darstellung von $D_3 (=A_3)$ als $SO(6, L)$).

(3) Gilt $k_c = 1$, $k_d = \ell$ für Zahlen $c \neq d$, so ist λ Vielfaches von ω_i für ein i ; dann muß gelten $i=1$ oder $i=\ell+1$ (da $\omega_{\ell+1} = -\lambda_\ell$, und da jede W -Bahn eines Gewichtes genau ein dominantes Element enthält, siehe /13,13.2/). Wir haben also $\lambda = m\lambda_1$ oder $\lambda = m\lambda_\ell$ für eine ganze Zahl $m > 0$. Im Fall $m=1$ gilt $G = SL(n, L)$ (denn λ_1 bzw. λ_ℓ ist das höchste Gewicht der natürlichen Darstellung von A_ℓ als $SL(\ell+1, L)$ bzw. der kontragredienten Darstellung). Im Fall $m > 1$ muß ein Gewicht $\mu \neq 0$ von G in L^n existieren, welches nicht zu λ konjugiert ist (unter W); denn die Gewichte von G in L^n (rel. T) erzeugen die Charaktergruppe von T , und es liegt Φ nicht im Erzeugnis der $m\omega_1, \dots, m\omega_{\ell+1}$ (falls $m > 1$). Die Rechnungen unter (1) und (2) zeigen nun $N' \geq 2\ell$, wenn N' die Kardinalität der W -Bahn von μ bezeichnet. Also $n \geq N + N' \geq (\ell+1) + 2\ell > 3\ell$. Daraus folgt wiederum $\dim(G) < n(n-1)/2$.

2. Fall: G ist vom Typ D_ℓ (ℓ ungerade).

Wegen $D_3 = A_3$ können wir annehmen $\ell \geq 5$. Es hat λ_1 genau 2ℓ Konjugierte $\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_\ell$ unter der Weylgruppe W ; diese spannen den Raum E auf. Ferner identifiziert sich W vermöge seiner Wirkung auf der Menge $\{\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_\ell\}$ mit der Gruppe $S_\ell \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell-1}$ (Permutationen und Vertauschungen einer gera-

den Anzahl von Vorzeichen, siehe /13,12.1/). Schreibt man nun λ als Linearkombination $\lambda = \sum c_i \omega_i$ und setzt $k_c := |\{i: |c_i| = c\}|$ für $c \in \mathbb{R}^+$, so ist die Standgruppe von λ in W offenbar in der Gruppe $\prod S_{k_c} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\ell-1}$ enthalten; also $N \geq \ell! 2^{\ell-1} / (\prod k_c! 2^{\ell-1}) = \ell! / \prod k_c!$. Es genügt zu zeigen $n > 2\ell$, denn dann gilt $\dim(G) = 2\ell(2\ell-1)/2 < n(n-1)/2$.

- (1) Gilt $k_c \geq 1$ für mindestens 3 verschiedene c , so hat man $n \geq N \geq \ell(\ell-1)(\ell-2)! / \prod k_c! \geq \ell(\ell-1) > 2\ell$.
- (2) Gilt $k_c + k_d = \ell$, $k_c \geq 2$, $k_d \geq 2$ für Zahlen $c \neq d$, so ist $n \geq N \geq \binom{\ell}{k_c} \geq \binom{\ell}{2} \geq 2\ell$; die Ungleichung $N \geq \binom{\ell}{k_c}$ ist in diesem Fall aber strikt, also $n > 2\ell$.
- (3) Gilt $k_c + k_d = \ell$, $k_c \geq \ell-1$ und $c \neq 0$ für Zahlen $c \neq d$, so erhält man $n \geq N \geq \ell! 2^{\ell-1} / \ell! = 2^{\ell-1} > 2\ell$.
- (4) Der einzige noch zu behandelnde Fall ist $\lambda \in \mathbb{R}\omega_i$ für ein i . Dann ist sogar $\lambda \in \mathbb{R}\lambda_1$. Dies folgt wiederum daraus, daß jedes Gewicht zu genau einem dominanten Gewicht W -konjugiert ist (/13,13.2/); ferner beachte man, daß $-\lambda_1$ zu λ_1 konjugiert unter W ist (da λ_1 unter jedem Automorphismus von Φ , welcher die Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ in sich abbildet, invariant bleibt). Diese Tatsache zeigt aber nun wiederum (zufolge dem Kriterium in /12,31.6/), daß jede irreduzible Darstellung von G mit höchstem Gewicht $\lambda \in \mathbb{R}\lambda_1$ eine invariante Bilinearform $\neq 0$ hat.

3. Fall: G ist vom Typ E_6 .

Es genügt zu zeigen $n > 13$; denn dann gilt $\dim(G) = 78 < n(n-1)/2$. Sei E_0 die von $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ aufgespannte Hyperebene von E . Dann ist $\Phi_0 := \Phi \cap E_0$ ein Wurzelsystem in E_0 vom Typ D_5 (mit Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_5$), und es identifiziert sich die Weylgruppe W_0 von Φ_0 mit einer Untergruppe der Standgruppe von λ_6 in W (siehe /12, Appendix (A.6)/). Man schreibe λ als

$\lambda = \lambda_0 + c\lambda_6$ mit λ_0 aus E_0 und c aus R . Zuzufolge dem obigen Fall 2 gilt $N_0 \geq 10$ für die Kardinalität N_0 der Bahn von λ_0 unter W_0 , falls $\lambda_0 \neq 0$. Ist also $\lambda_0 \neq 0$, und enthält die W -Bahn B von λ ein Element, welches nicht W_0 -konjugiert zu λ und kein Vielfaches von λ_6 ist, so erhält man $n \geq N \geq 20$. Andererseits kann B nicht nur aus den W_0 -Konjugierten von λ bestehen, denn W wirkt irreduzibel in E (/13,10.4/) und kann somit das in E_0 enthaltene Erzeugnis der $u(\lambda) - w(\lambda)$, $u, w \in W_0$, nicht invariant lassen (falls $\lambda_0 \neq 0$).

Es bleibt also nur der Fall zu behandeln, daß die W -Bahn B von λ ein Vielfaches von λ_6 enthält. Dann gilt

$$\begin{aligned} N = |B| &= |W|/|\text{Stab}_W(\lambda_6)| \geq |W|/|\text{Aut } \phi_0| = |W|/(2|W_0|) = \\ &= 2^7 3^4 5 / (2 \cdot 2^4 \cdot 5!) = 27/2 > 13 . \end{aligned}$$

LITERATURVERZEICHNIS

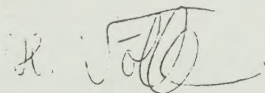
1. R. BAER, Free mobility and orthogonality,
Trans.Amer.Math.Soc. 68 (1950), 439-460
2. H. BASS, K-theory and stable algebra,
Publ. I.H.E.S. n^o 22 (1964), 5-60
3. H. BASS/J. MILNOR/J.-P. SERRE, Solution of the congruence
subgroup problem for SL_n ($n \geq 3$) and Sp_n ($n \geq 2$) ,
Publ. I.H.E.S. n^o 33 (1967), 421-499
4. B. BEISIEGEL, Automorphismengruppen homozyklischer
p-Gruppen, Arch.Math. 29 (1977), 363-366
5. A. BOREL, Linear algebraic groups,
Benjamin, New York 1969
6. W.L. CHOW, On the geometry of algebraic homogeneous
spaces, Ann. of Math. 50 (1949), 32-67
7. H. FREUDENTHAL, Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-
Lieschen Raumproblems, Math. Z. 63 (1956), 374-405
8. H. FREUDENTHAL, Das Helmholtz-Liesche Raumproblem bei
indefiniter Metrik, Math. Annalen 156 (1964), 263-412
9. R.L. GRIESS, Schur multipliers of the known finite simple
groups. II ,in: The Santa Cruz Conference on Finite Groups,
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 37, AMS,
Providence, Rhode Island 1980
10. H. HASSE, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme
aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II,
Jahr.Deut.Math.Ver., Erg.Bd. VI, Teubner 1930
11. D.G. HIGMAN, Flag-transitive collineation groups of finite
projective spaces, Illinois Journ. of Math. 6(1962),434-446
12. J.E. HUMPHREYS, Linear algebraic groups, second printing,
Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1981

13. J.E. HUMPHREYS, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1970
14. N. JACOBSON, Basic Algebra II, Freeman, San Francisco 1980
15. I. KAPLANSKY, Commutative Rings, Revised edition, The University of Chicago Press, Chicago 1974
16. G. PICKERT, Elementare Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems, Math. Annalen 120 (1948), 492-501
17. O. SCHREIER/B.L. VAN DER WAERDEN, Die Automorphismen der projektiven Gruppen, Abh.Math.Sem.Hamburg.Univ. 6 (1928), 303-322
18. O. TAUSKY/H. ZASSENHAUS, On the 1-cohomology of the general and special linear groups, Aequationes Math. 5 (1970), 129-201
19. H. VÖLKLEIN, Transitivitätsfragen bei linearen Gruppen, Journal of Algebra 78 No.2(1982), 341-356
20. H. VÖLKLEIN, Fahnentransitive lineare Gruppen mit diagonalisierbarer Standgruppe, Geometriae Dedicata 13 (1982), 215-229
21. W.C. WATERHOUSE, Introduction to Affine Group Schemes, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1979

23.4.1983

LEBENS LAUF:

Ich wurde am 13.1.57 als Sohn des kaufmännischen Angestellten Max Völklein und seiner Ehefrau Edeltraut in Nürnberg geboren. Vom sechsten bis zum zehnten Lebensjahr besuchte ich die Volksschule an der Kiderlinstraße in Fürth, danach wechselte ich an das Hardenberg-Gymnasium Fürth (mathematisch-naturwiss. Zweig) über. Dort beendete ich meine Schulzeit im Jahre 1975 mit der Reifeprüfung. Im darauffolgenden Herbst nahm ich mein Studium der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg auf, welches ich im Februar 1980 mit der Diplomprüfung abschloß. Im akademischen Jahr 80/81 war ich dann als wissenschaftlicher Mitarbeiter am mathematischen Institut der Universität Eichstätt beschäftigt. Mit Hilfe eines Stipendiums der "Studienstiftung des deutschen Volkes" verbrachte ich die Zeit von Herbst 1981 bis Frühjahr 1983 im Rahmen eines wissenschaftlichen Auslandsaufenthalts an der "University of California at Berkeley".



(Helmut Völklein)

Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197